Pavages rythmiques : aspects algébriques et algorithmiques

Hélianthe Caure

IRCAM - UPMC

18 novembre 2013

Rythme

Notations

On représente de façon équivalente le rythme A par

- Une partie finie de $\mathbb{N}$ qui contient 0.
- Un polynôme $A(X) \in \{0, 1\}[X]$.
- Une suite A_{0-1} presque nulle ou finie de 0 et de 1.

Exemple

Le rythme $A = \{0, 1, 3, 6\}$ (qui pave $\mathbb{Z}_8$ avec le rythme $B = \{0, 4\}$) se représente aussi par
$A(X) = 1 + X + X^3 + X^6$ et par
$A_{0-1} = 1101001 = 1101001000000\ldots$.

Canon

Définitions

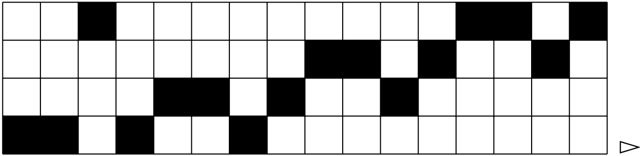
A pave $\mathbb{Z}_N$ avec B ssi

- $A \oplus B = \mathbb{Z}_N$
- $A(X) \cdot B(X) = 1 + X + \ldots + X^{N-1} \bmod (X^N - 1)$
- $\mathbb{1}_A * \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_N}$

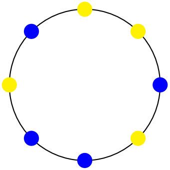
Exemple

- $A \oplus B = \{0, 1, 3, 6\} \oplus \{0, 4\} = \mathbb{Z}_8$
- $A(X) \cdot B(X) = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5 + X^6 + X^7 \bmod (X^8 - 1)$
- $\forall k \in \mathbb{Z}_8,\ A_{0-1} \star B_{0-1}(k) = 1$

Représentations



représentent le canon $A = \{0, 1, 3, 6\}$ qui pave $\mathbb{Z}_{16}$ avec $B = \{0, 4, 8, 12\}$.



représente le canon $A = \{0, 1, 3, 6\}$ qui pave $\mathbb{Z}_8$ avec $B = \{0, 4\}$.

Concaténation

Si $A \subset \mathbb{N}$ pave $\mathbb{Z}_N$, on note $\overline{A}^k = A \oplus \{0, N, 2N, \ldots, (k-1)N\}$ son rythme *concaténé* k fois.
A pave $\mathbb{Z}_N$ avec B ssi $\overline{A}^k$ pave $\mathbb{Z}_{kN}$ avec B.

Dualité

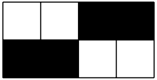
Si $A \oplus B = \mathbb{Z}_N$, alors $B \oplus A = \mathbb{Z}_N$ et cela donne un nouveau canon. On appelle cette opération la *dualité*.

Pavage compact

Si on a exactement $A \oplus B = [\![0, N-1]\!]$, on dit que A pave $\mathbb{Z}_N$ de façon *compacte*.

Exemple

$A \oplus B = \{0, 1\} \oplus \{0, 2\}$ pave $\mathbb{Z}_4$ de façon compacte :



Périodicité

Un canon $A \oplus B$ de $\mathbb{Z}_N$ est dit *périodique* s'il existe $0 < k < N$ tel que $A + k = A$ ou $B + k = B$.
Un canon est dit de Vuza s'il n'admet pas de période.

Théorème [Hajós, László, Rédei, De Bruijn, Sands]

Il existe des canons de Vuza pour les N, et seulement pour ceux là, qui ne sont pas de la forme

$$N = p^\alpha, N = p^\alpha q, N = p^2 q^2, N = pqr, N = p^2 qr, N = pqrs$$

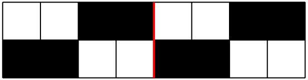
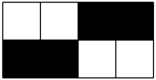
où p, q, r, s sont des premiers distincts.

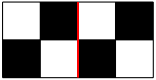
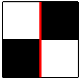
Théorème [Amiot]

Tout canon peut être déduit par concaténation et dualité du canon trivial $\{0\} \oplus \{0\}$ ou de canons de Vuza.

Exemple

$\{0,1,4,5\} \oplus \{0,2\} = \mathbb{Z}_8$ est concaténé de $\{0,1\} \oplus \{0,2\} = \mathbb{Z}_4$, lui même concaténé de $\{0,1\} \oplus \{0\} = \mathbb{Z}_2$ concaténé du canon trivial.

 concaténé de 

dual de  concaténé de 

concaténé du canon trivial : 

Polynômes cyclotomiques

A pave $\mathbb{Z}_N$ avec B ssi

$$\begin{aligned} A(X) \cdot B(X) &= 1 + X + \ldots + X^{N-1} \bmod (X^N - 1) \\ &= \frac{X^N - 1}{X - 1} \bmod (X^N - 1) \end{aligned}$$

Soit $d \in \mathbb{N}^*$, on note le d-ième polynôme cyclotomique
$\Phi_d = \prod_{\substack{k \leqslant d \\ k \wedge d = 1}} \left(X - e^{2i\pi \frac{k}{d}} \right)$.
Si A est un rythme, on note $S_A = \{p^a, p \text{ premier}, \Phi_{p^a} | A(X)\}$.

Conditions de Coven/Meyerowitz

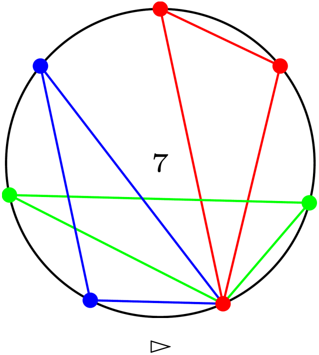
(T_0) A pave
(T_1) $A(1) = \prod_{s \in S_A} \Phi_s(1)$
(T_2) si $s_1, \ldots, s_m$ puissances de premiers distincts sont dans S_A, alors $\Phi_{s_1 \cdots s_m} | A(X)$.

Conjecture de Coven/Meyerowitz

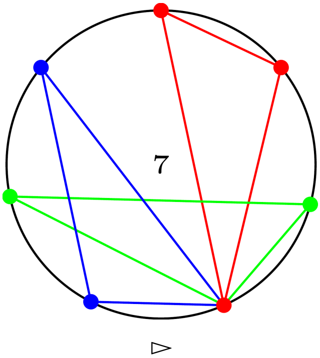
$$(T_0) \Longleftrightarrow (T_1) \wedge (T_2)$$

On a pour l'instant $(T_0) \Leftarrow (T_1) \wedge (T_2)$, $(T_0) \Rightarrow (T_1)$.
Si $\sharp A$ a au plus deux facteurs premiers, l'équivalence est vraie.
On a que l'équivalence est vraie ssi elle est vraie pour les canons de Vuza.

$$A(X) \in \{0, 1\}[X]$$



$A(X) \in \mathbb{F}_2[X]$



Définition

$(A, B) \in \mathbb{N}^2$ pavent $\mathbb{Z}_N$ modulo p ssi

$$A(X) \cdot B(X) = 1 + X + \cdots + X^{N-1} \bmod (X^N - 1, p).$$

Exemple

$A \oplus B = \{0, 1, 3\} \oplus \{0, 2, 3\} = \{0, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 6\}$ pave $\mathbb{Z}_7$ modulo 2.

Remarque

On adapte aux multiensembles les notions de polynôme associé, notation $0 - 1$, pavage compact...

Théorème

Soit p premier, $P \in \mathbb{F}_p[X]$ tel que $P(0) \neq 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que P divise $X^N - 1$.

Remarque

En travaillant dans $\mathbb{F}_p[X]$, tout motif A pave modulo p :

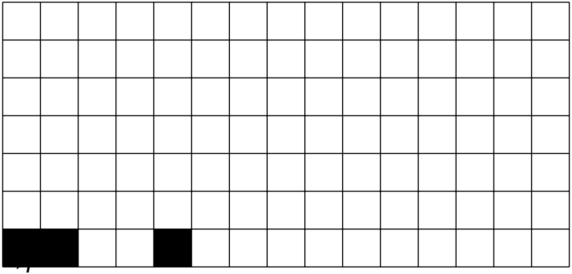
$$P(X) = A(X)(X-1)$$

et Q, tel que $P(X) \cdot Q(X) = (X^n - 1)$, associé à un motif en itérant

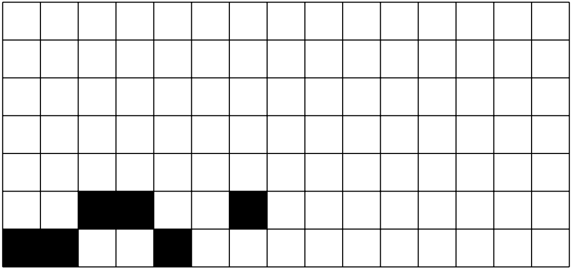
$$\alpha X^k = (\alpha - 1)X^k + X^{k+N} \bmod X^N - 1.$$

Dans $\mathbb{F}_2[X]$: tout motif admet un pavage compact modulo 2.

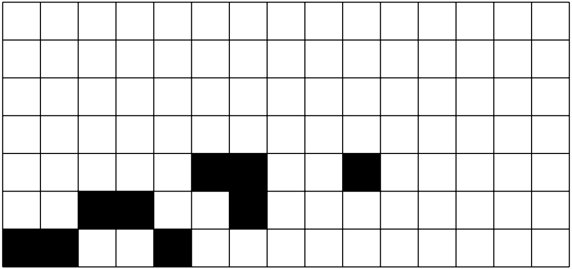
Algorithme glouton avec $A = \{0, 1, 4\}$ modulo 2



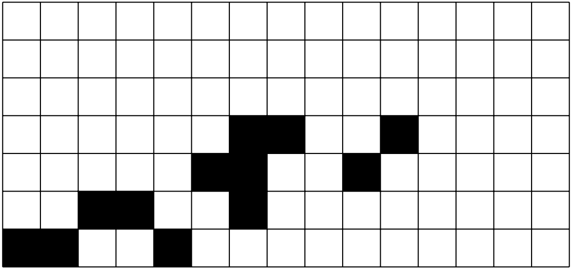
Algorithme glouton avec $A = \{0, 1, 4\}$ modulo 2



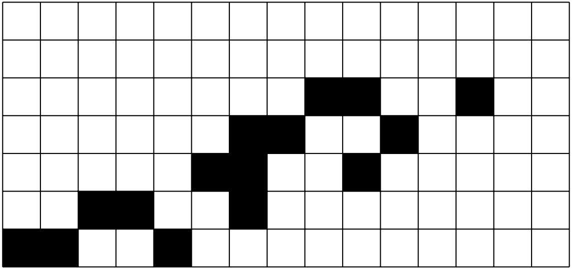
Algorithme glouton avec $A = \{0, 1, 4\}$ modulo 2



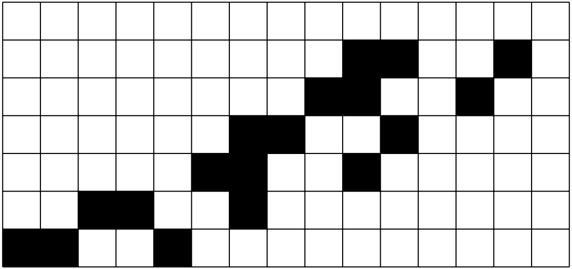
Algorithme glouton avec $A = \{0, 1, 4\}$ modulo 2



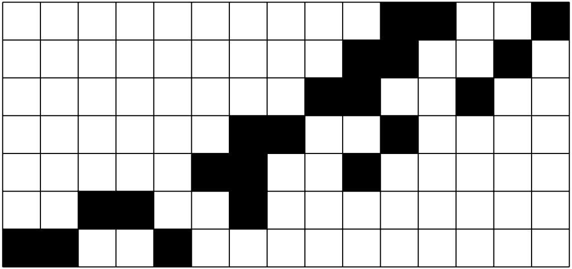
Algorithme glouton avec $A = \{0, 1, 4\}$ modulo 2



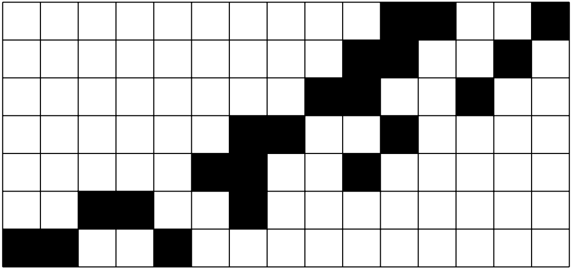
Algorithme glouton avec $A = \{0, 1, 4\}$ modulo 2



Algorithme glouton avec $A = \{0, 1, 4\}$ modulo 2



Algorithme glouton avec $A = \{0, 1, 4\}$ modulo 2



Propriété

Cet algorithme permet d'avoir le plus petit nombre d'entrées pour un pavage modulo p.
↳ Vuza modulo p.

Taille minimal du pavage par $A = \{0, 1, n\}$ modulo 2

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	3	7	15	21	63	127	63	73	889	1533	3255

13	14	15	16
7905	11811	32767	255

Taille minimal du pavage par $A = \{0, 1, n\}$ modulo 2

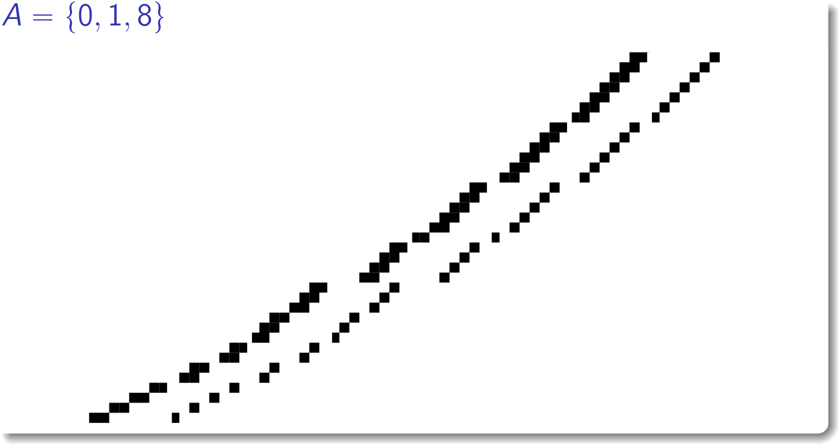
n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	3	7	15	21	63	127	63	73	889	1533	3255

13	14	15	16
7905	11811	32767	255

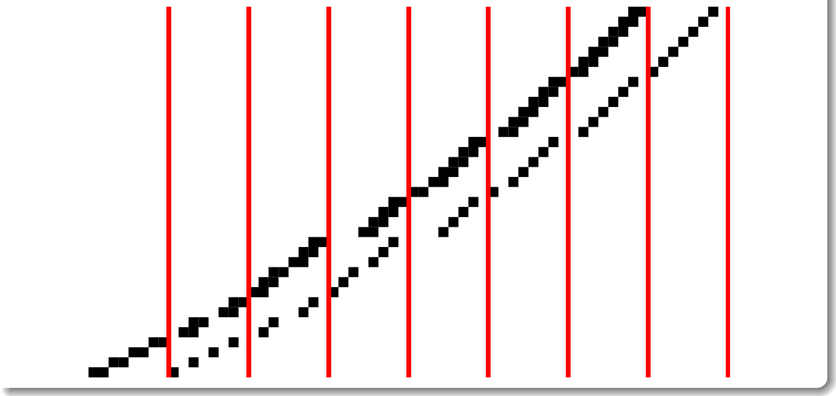
Théorème

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le motif $A = \{0, 1, 2^k\}$ pave modulo 2 avec B qui a $\sharp B = 4^k - 3^k$ termes un pavage compact qui finit sur le temps $N = 4^k - 2$ et en obtenant $4^k - \dfrac{3^{k+1} - 1}{2}$ notes superposées.

$A = \{0, 1, 8\}$



$A = \{0, 1, 8\}$



$A = \{0, 1, 4\}$ avec $B = \{0, 2, 5, 6, 8, 9, 10\}$
$A = \{0, 1, 8\}$ avec $B = \{0, 2, 4, 6, 9, 10, 13, 14, 16, 17, 18, 20, \dots\}$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$A = \{0, 1, 4\}$ avec $B = \{0, 2, 5, 6, 8, 9, 10\}$
$A = \{0, 1, 8\}$ avec $B = \{0, 2, 4, 6, 9, 10, 13, 14, 16, 17, 18, 20, \dots\}$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$A = \{0, 1, 4\}$ avec $B = \{0, 2, 5, 6, 8, 9, 10\}$
$A = \{0, 1, 8\}$ avec $B = \{0, 2, 4, 6, 9, 10, 13, 14, 16, 17, 18, 20, \ldots\}$

$$
\begin{array}{cccccccc}
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & & & & \\
0 & 1 & 1 & 1 & & & & \\
1 & 1 & 1 & 1 & & & &
\end{array}
$$

$A = \{0, 1, 4\}$ avec $B = \{0, 2, 5, 6, 8, 9, 10\}$
$A = \{0, 1, 8\}$ avec $B = \{0, 2, 4, 6, 9, 10, 13, 14, 16, 17, 18, 20, \ldots\}$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$A = \{0, 1, 4\}$ avec $B = \{0, 2, 5, 6, 8, 9, 10\}$
$A = \{0, 1, 8\}$ avec $B = \{0, 2, 4, 6, 9, 10, 13, 14, 16, 17, 18, 20, \ldots\}$

1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1	0

$A = \{0, 1, 4\}$ avec $B = \{0, 2, 5, 6, 8, 9, 10\}$
$A = \{0, 1, 8\}$ avec $B = \{0, 2, 4, 6, 9, 10, 13, 14, 16, 17, 18, 20, \ldots\}$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline T(k) & T(k) \\ \hline \widetilde{T(k)} & 1 \\ \hline \end{array} \; = \; T(k+1)$$

$A = \{0, 1, 4\}$ avec $B = \{0, 2, 5, 6, 8, 9, 10\}$
$A = \{0, 1, 8\}$ avec $B = \{0, 2, 4, 6, 9, 10, 13, 14, 16, 17, 18, 20, \ldots\}$

1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1	0

Énumération

$\sharp B(k) = b(k) =$ le nombre de 1 dans le tableau $T(k)$, vérifie $b(1) = 1$; $b(2) = 7$ et

$$b(k+1) = 3 * b(k) + 4^k.$$

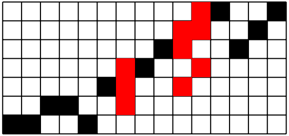
Soit pour tout k,

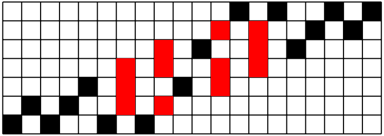
$$b(k+2) - 7b(k+1) + 12b(k) = 0,$$

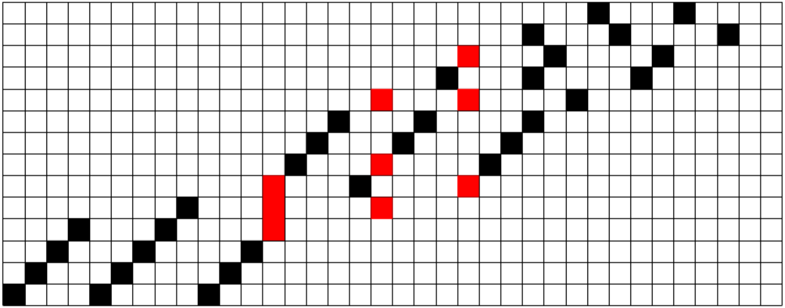
qui donne le résultat $b(k) = 4^k - 3^k$.

$$N = (2^k - 1) * 2^k - 1 + 2^k - 1 = 4^k - 2 \text{ et } \sharp D = 4^k - \frac{3^{k+1} - 1}{2}.$$

Rapport doublon/rétrograde du motif







Factorisation de multiensembles en ensembles

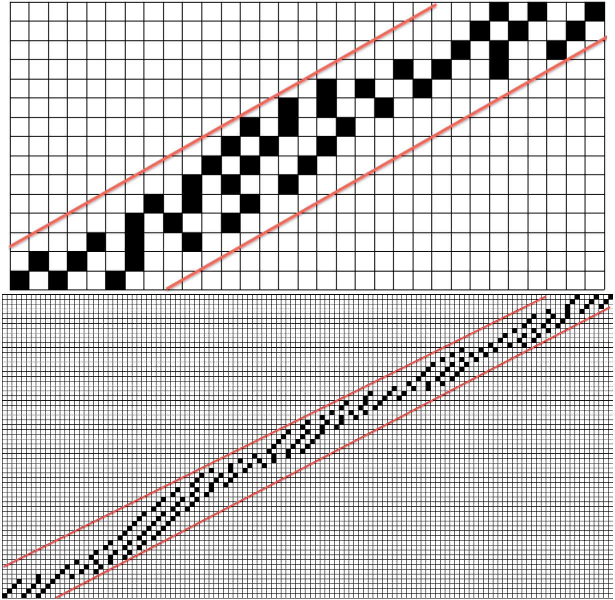
Symétrie par rapport à un sous-groupe

$A = [0, 3, 9]$ pave $\mathbb{Z}_{20}$ modulo 2 avec $B = [0, 1, 2, 6, 7, 8, 9, 10, 11]$ donnant les doublons $D = [9, 10, 11]$.
De même $A = [0, 6, 9]$ avec $B = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11]$ donnant $D = [9, 10, 11]$.

Zooming

$[0, 2, 6, 8] + [0, 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 14, 15] = \mathbb{Z}_{24}$ modulo 2 donnant
$D = [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17]$
$[0, 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9] + [0, 4, 6, 8, 10, 14] = \mathbb{Z}_{24}$ modulo 2 donnant
$D = [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17]$.
Zoom de $[0, 1, 3, 4] + [0, 2, 3, 4, 5, 7] = \mathbb{Z}_{12}$ modulo 2

Croissance du pavage



Autres pistes

- Élargir théorème pour $A(k, m) = \{0, 1, 2, \ldots, m, m^k\}$
- Pavage mélodico-rythmique
- Pavage non périodiques à la Penrose
- Pavage avec rétrogradation, augmentation...
- Aspects perceptifs de la non périodicité modulo p
- Algorithmes plus rapides d'exploration des Vuza
- $\ldots$

Merci de votre attention.