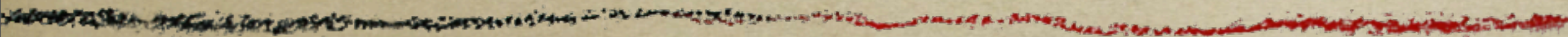


Λ





*Une découverte mathémusicale de Norman Carey
exposée par Emmanuel Amiot*

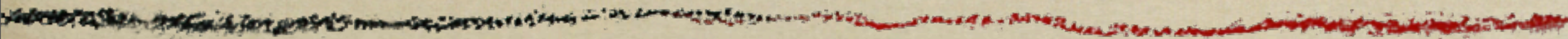
Paris, le 18 novembre 2013

Λ



bre 2013

Menu



Menu

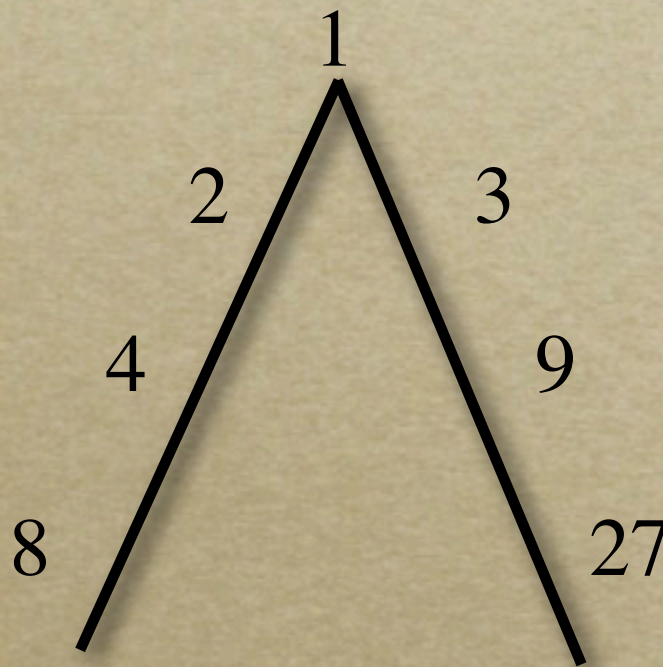
- *Origine musicale de Λ*
- *Quelques propriétés apparentes*
- *Lien avec le développement en fraction continue*
- *Ses différents palindromes*
- *Richesse*

Lambda

- *Mentionné par Platon dans le Timée*

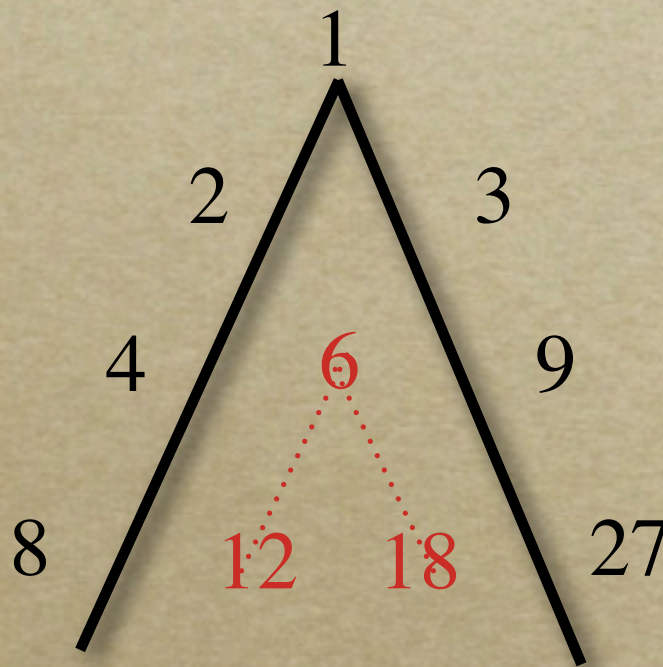
Lambda

- *Mentionné par Platon dans le Timée*



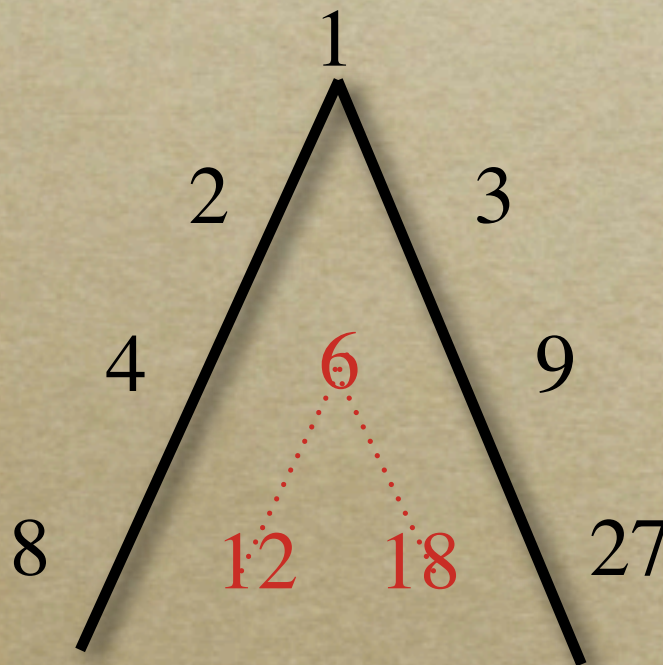
Lambda

- *Mentionné par Platon dans le Timée*



Lambda

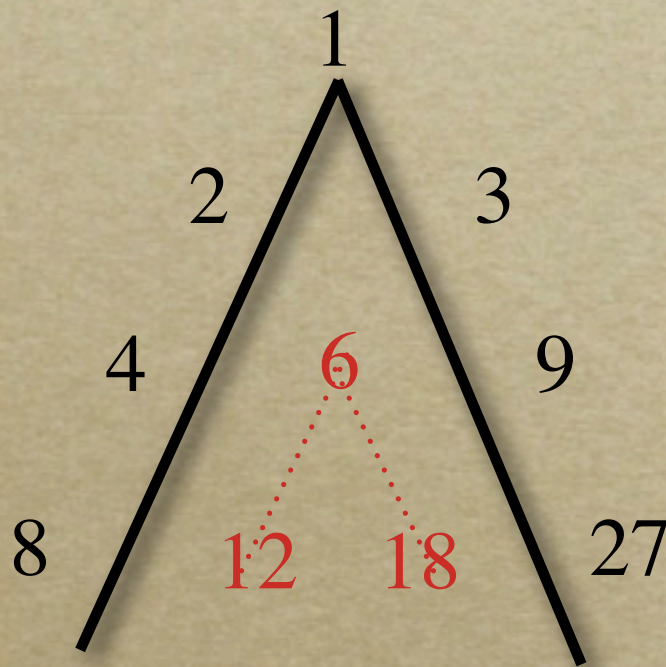
- *Mentionné par Platon dans le Timée*



1 2 3 4 6 8 9 12 16 18 24 27 32 ...

Lambda

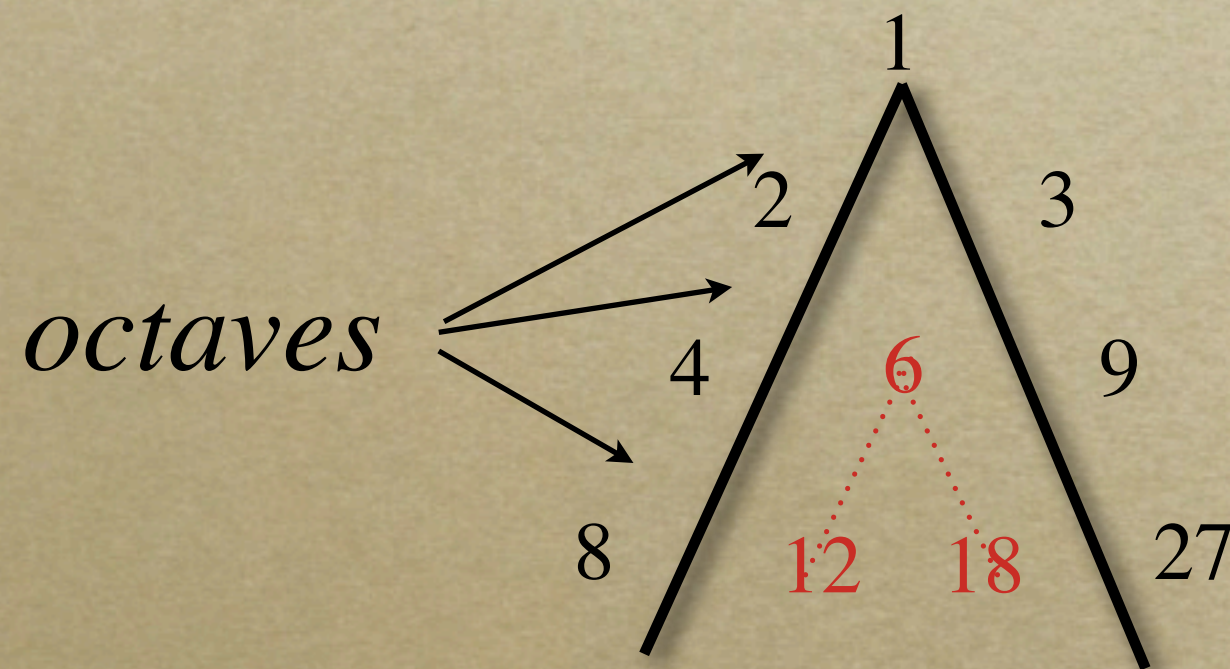
- *Interprétation musicale*



1 2 3 4 6 8 9 12 16 18 24 27 32 ...

Lambda

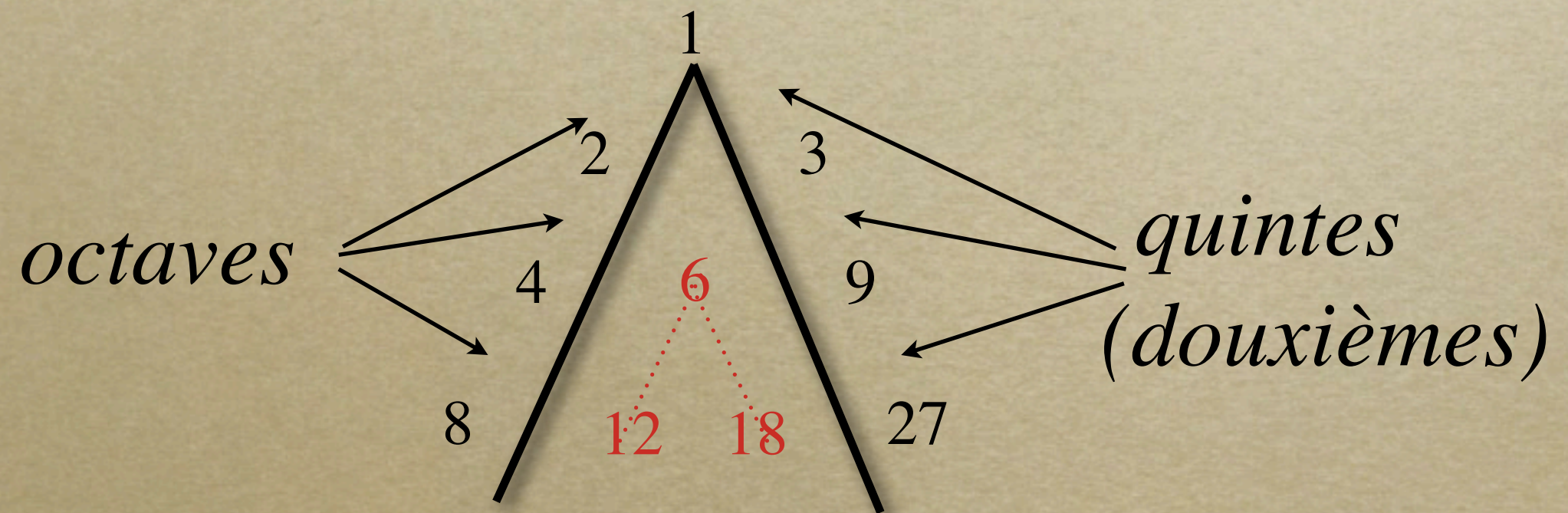
- *Interprétation musicale*



1 2 3 4 6 8 9 12 16 18 24 27 32 ...

Lambda

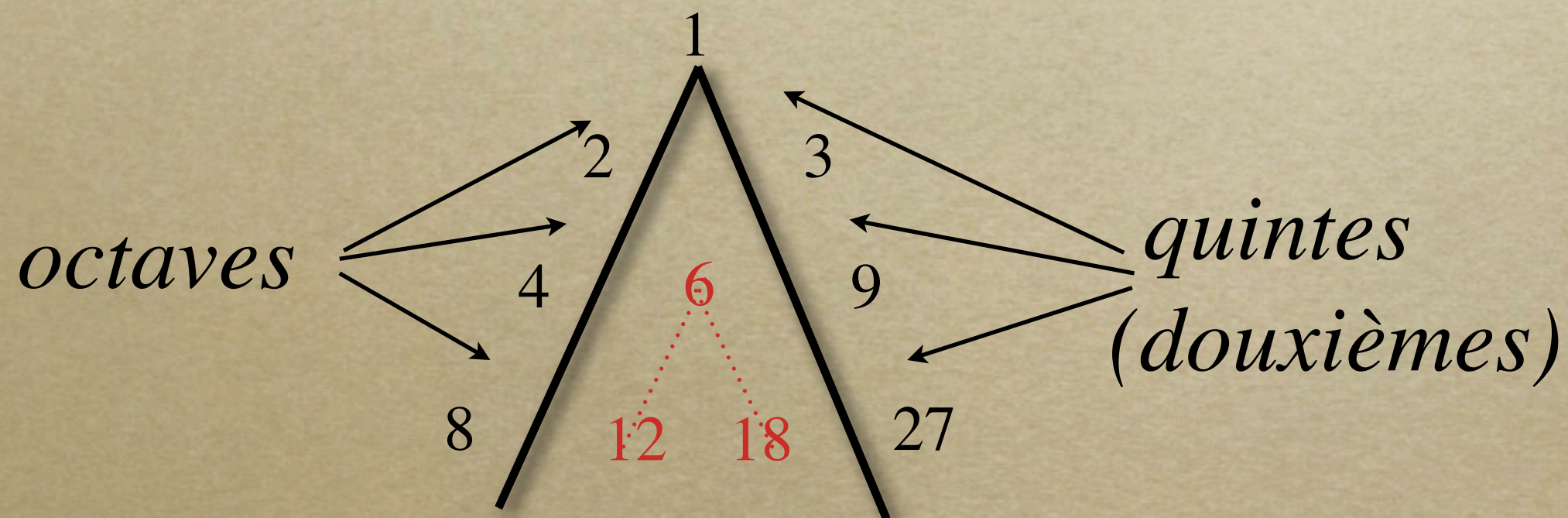
- *Interprétation musicale*



1 2 3 4 6 8 9 12 16 18 24 27 32 ...

Lambda

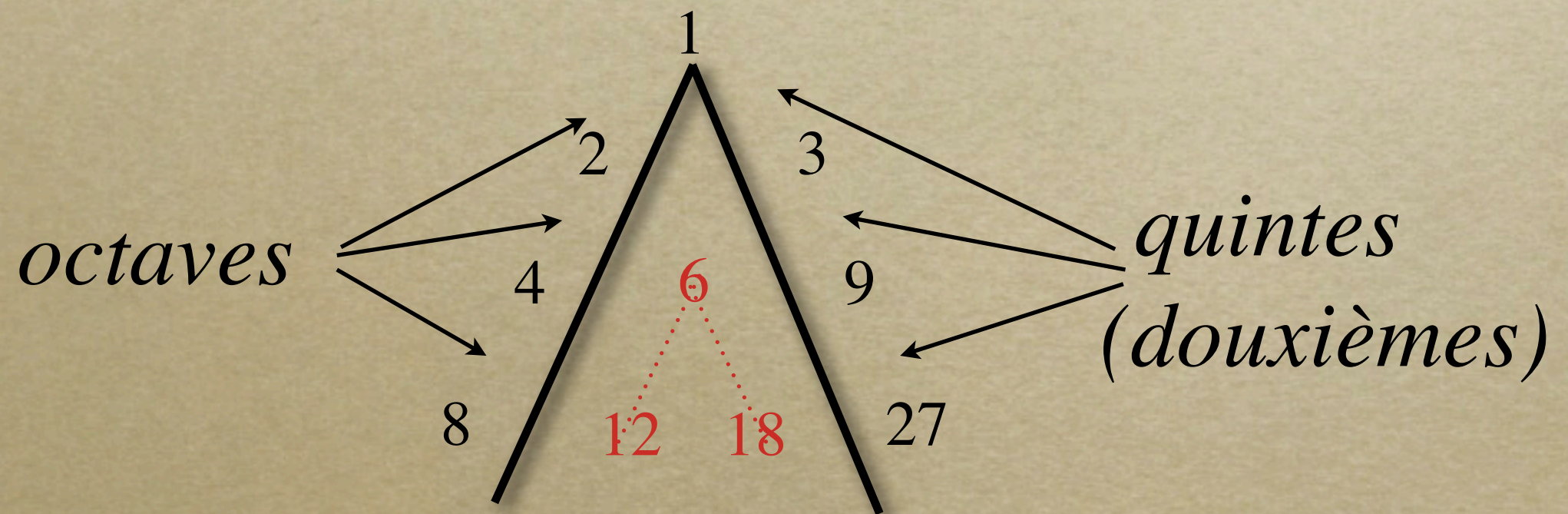
- *Interprétation musicale*



1	2	3	4	6	8	9	12	16	18	24	27	32 ...
fa	fa	do	fa	do	fa	sol	do	fa	sol	do	ré	fa ...

Lambda

- *Interprétation musicale*



1	2	3	4	6	8	9	12	16	18	24	27	32 ...
fa	fa	do	fa	do	fa	sol	do	fa	sol	do	ré	fa ...

Lambda

- *Interprétation musicale*

Lambda

- *Interprétation musicale*

... 384, 432, 486, 512, 576, 648, 729, ...

... do ré mi fa sol la si ...

Lambda

- *Interprétation musicale*

... 384, 432, 486, 512, 576, 648, 729, ...

... do ré mi fa sol la si ...

fa fa do fa do fa sol do fa sol do ré fa ...

Lambda

- *Interprétation musicale*

... 384, 432, 486, 512, 576, 648, 729, ...

... do ré mi fa sol la si ...

fa fa do fa do fa sol do fa sol do ré fa ...

8^{ve} 5^{te} 4^{te} 5^{te} 4^{te} 2^{de} 4^{te} 4^{te} 2^{de} 4^{te} 2^{de} 3^{ce} ...

Lambda

- *Interprétation musicale*

... 384, 432, 486, 512, 576, 648, 729, ...

... do ré mi fa sol la si ...

fa fa do fa do fa sol do fa sol do ré fa ...

8^{ve} 5^{te} 4^{te} 5^{te} 4^{te} 2^{de} 4^{te} 4^{te} 2^{de} 4^{te} 2^{de} 3^{ce} ...

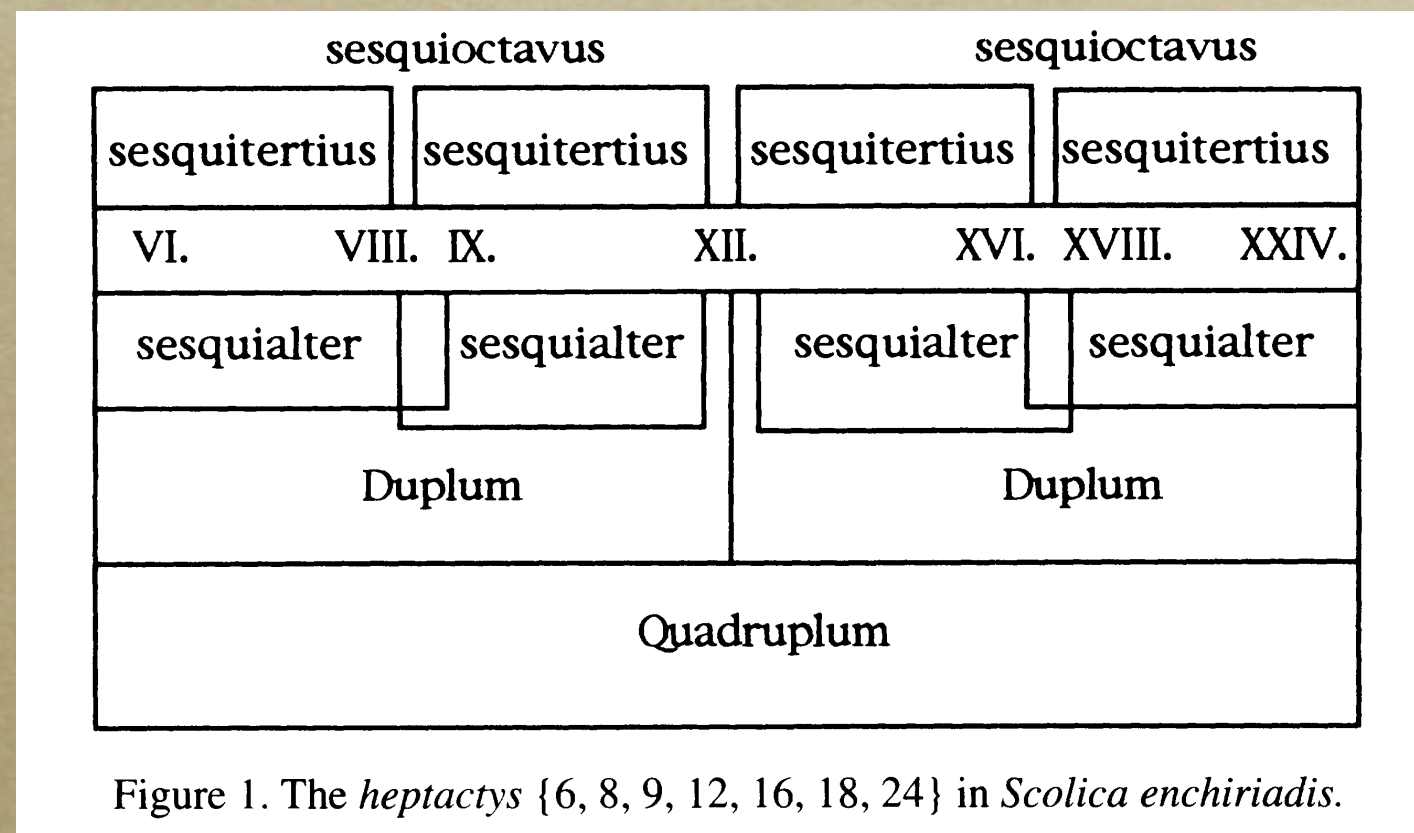
$\Lambda =$ a b c b c d c c d c d e ...

Lambda

- *Interprétation musicale*

Lambda

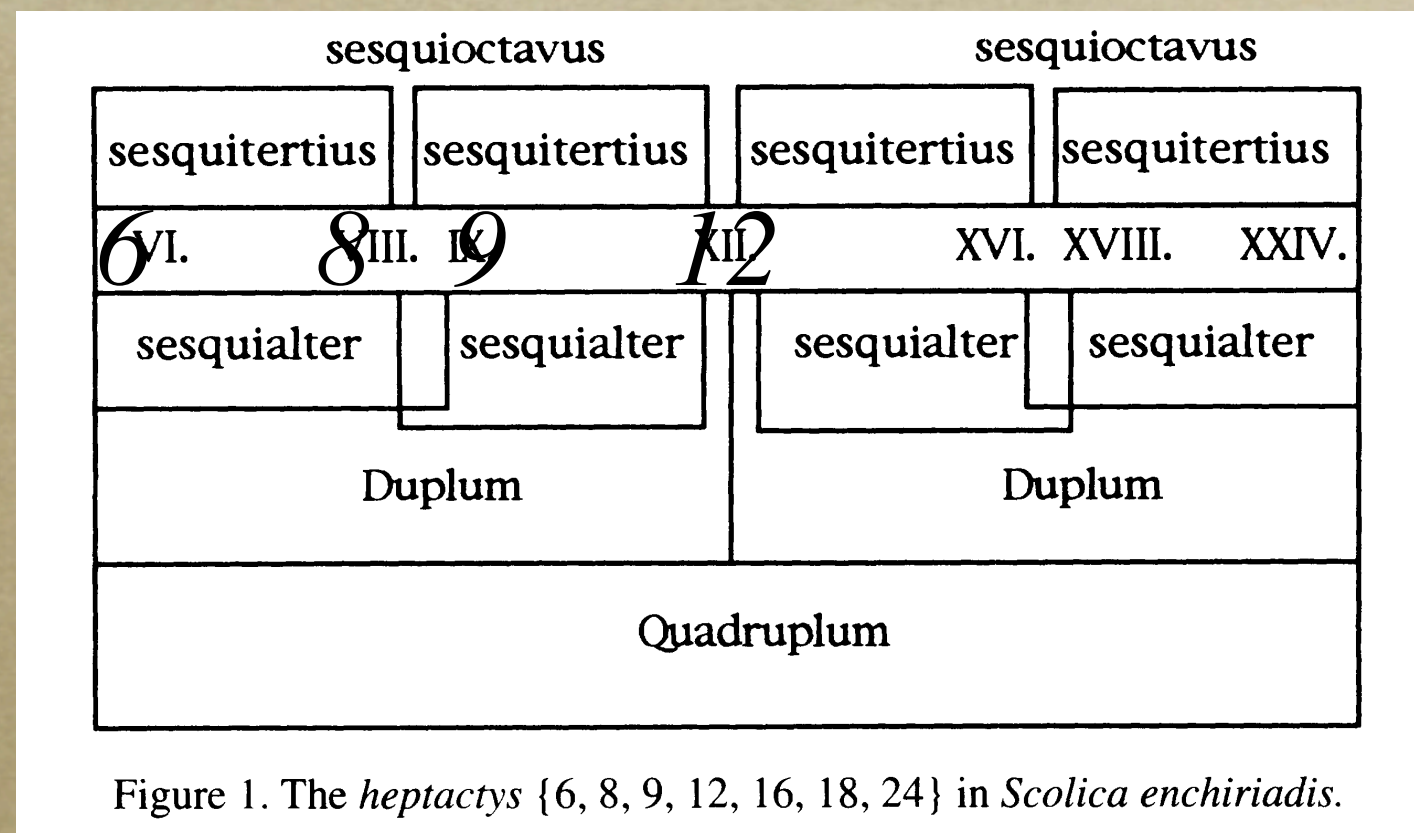
◦ *Interprétation musicale*



IX^e siècle, anonyme

Lambda

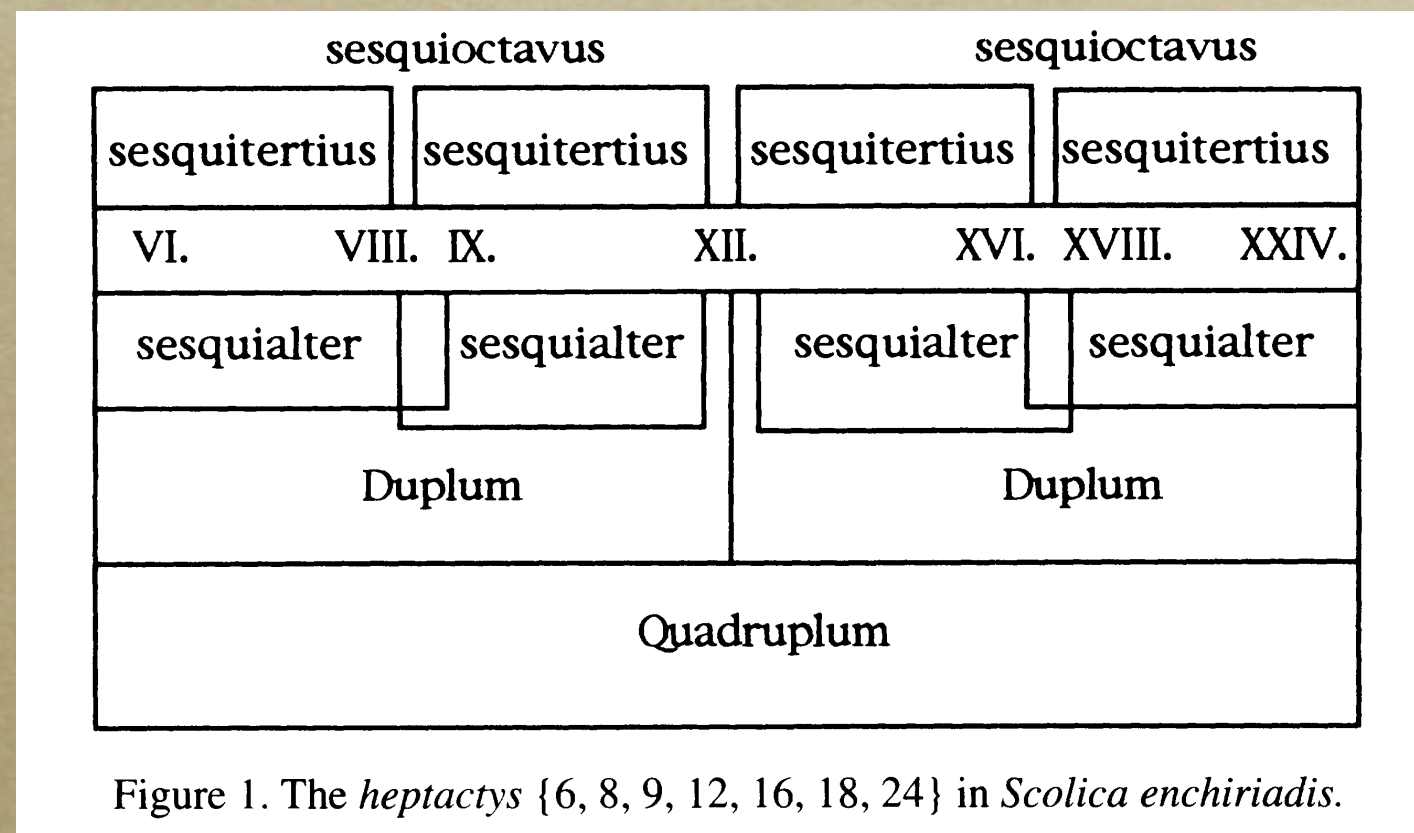
◦ *Interprétation musicale*



IX^e siècle, anonyme

Lambda

◦ *Interprétation musicale*

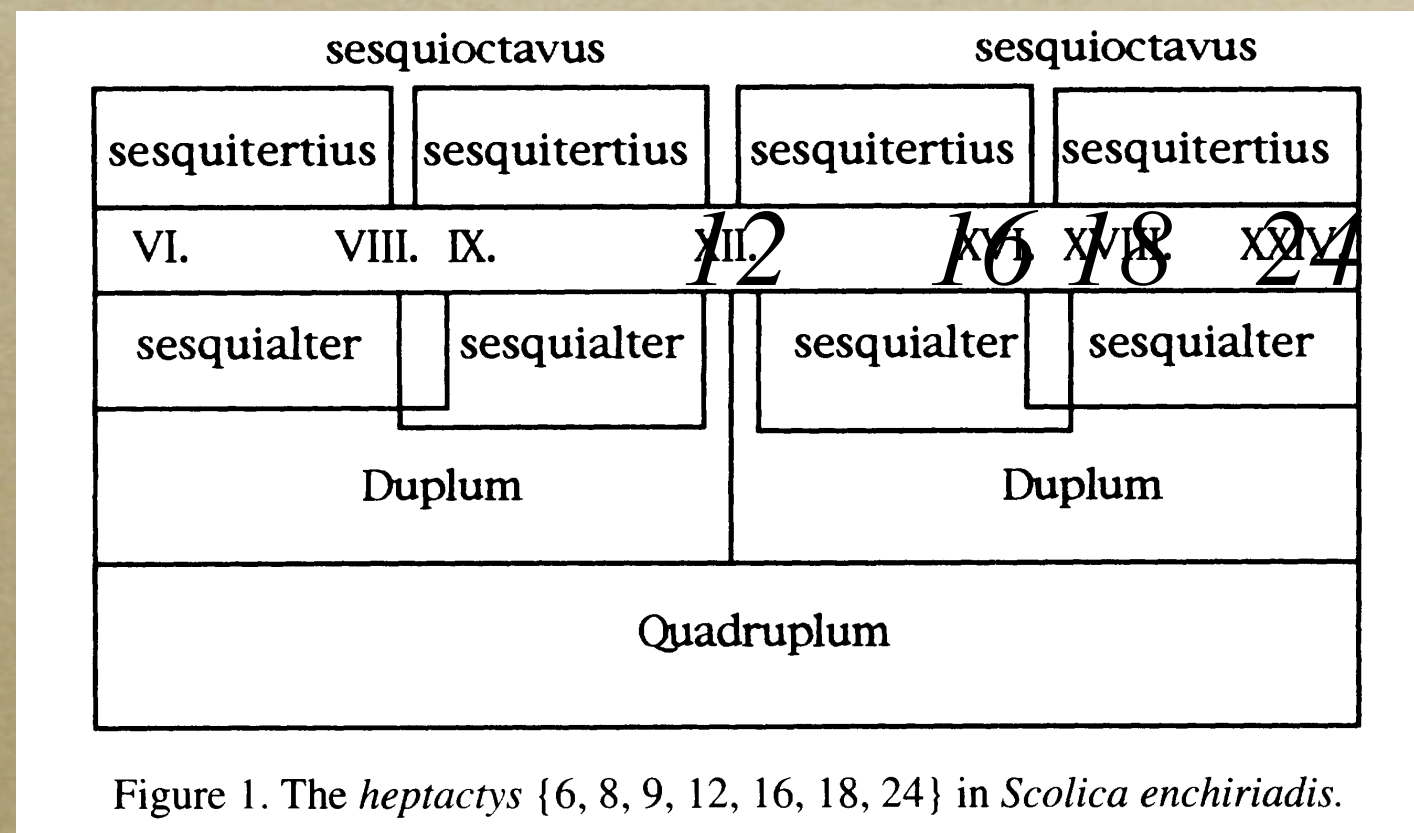


IX^e siècle, anonyme

6 8 9 12

Lambda

◦ *Interprétation musicale*

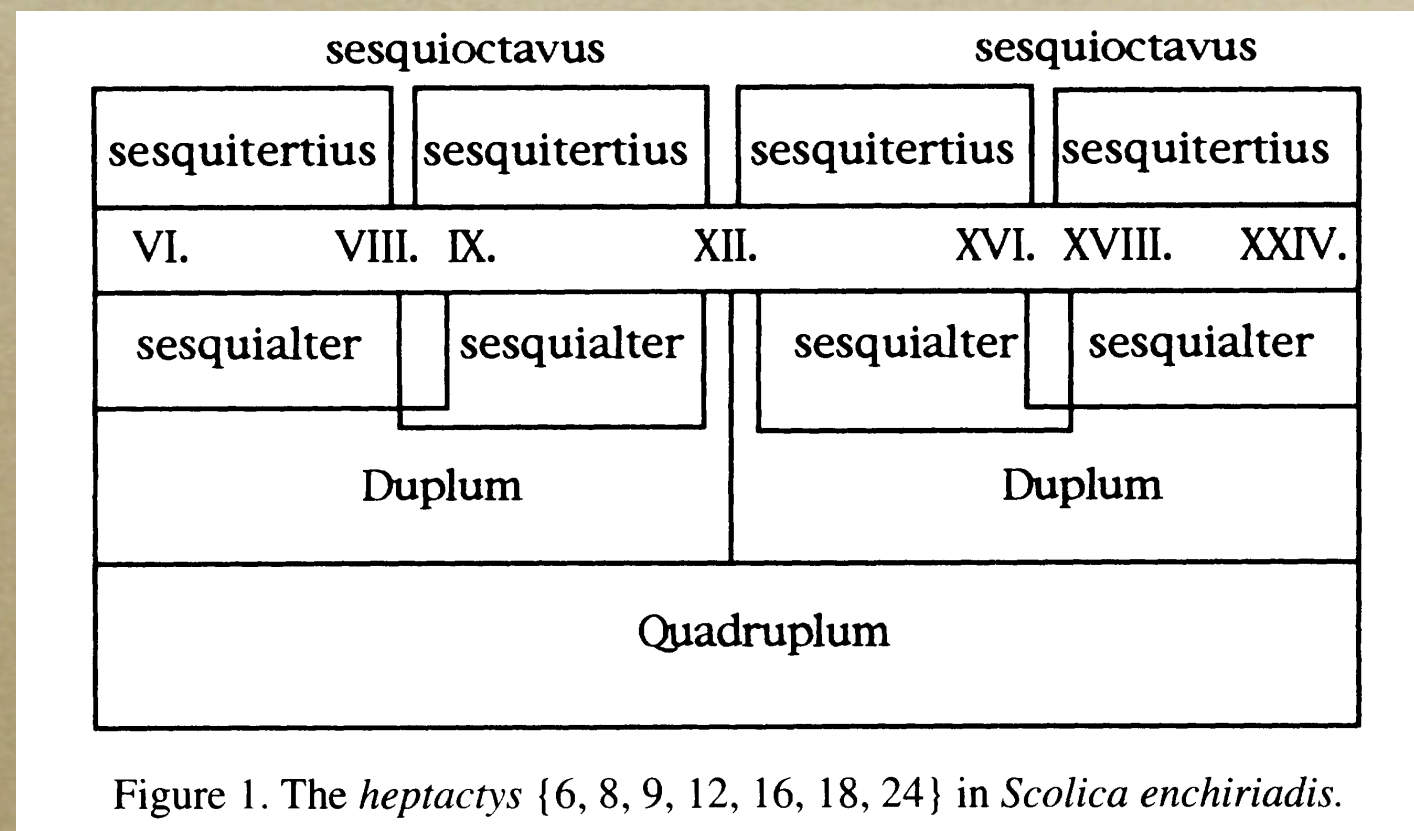


IX^e siècle, anonyme

6 8 9 12

Lambda

◦ *Interprétation musicale*



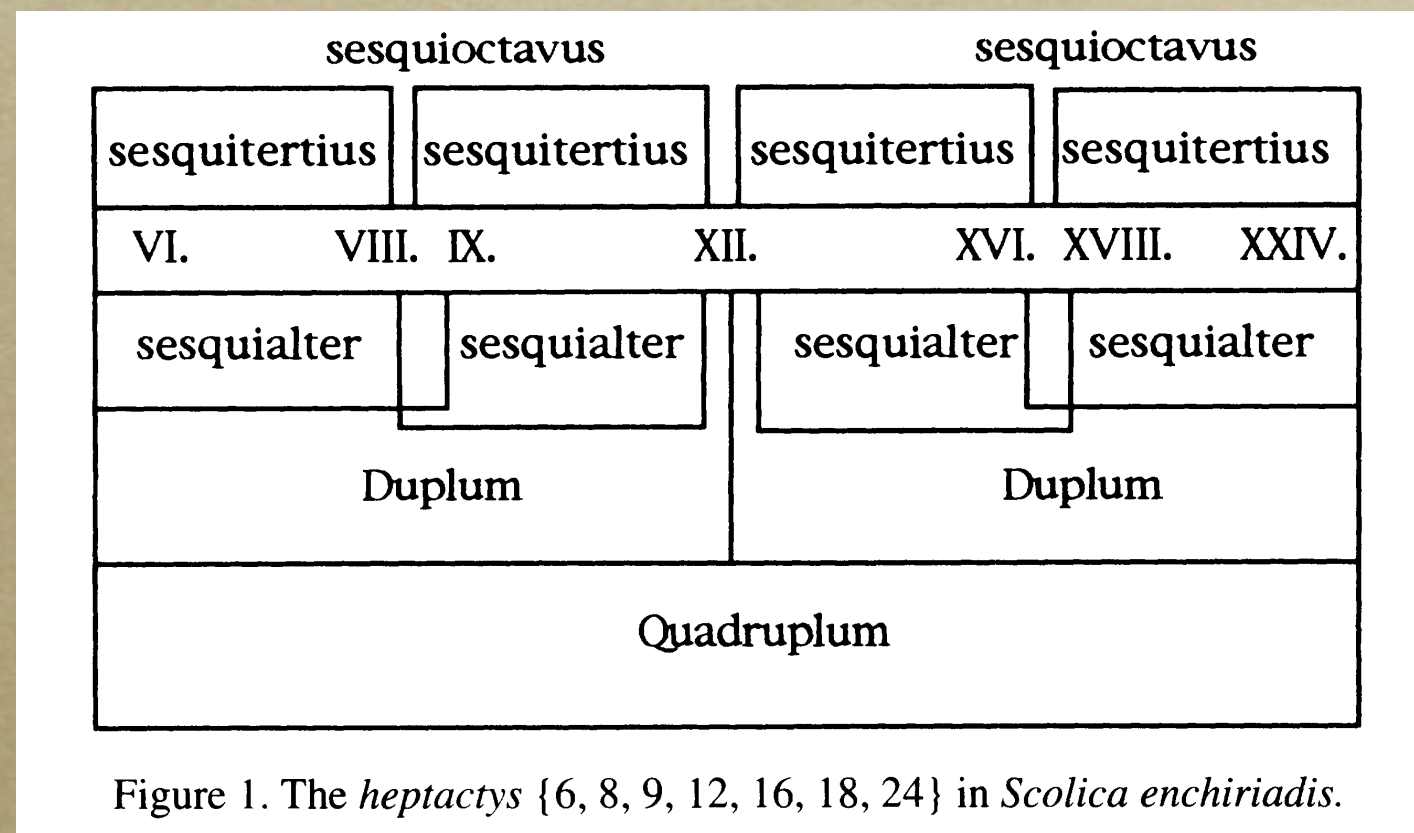
IX^e siècle, anonyme

6 8 9 12

12 16 18 24

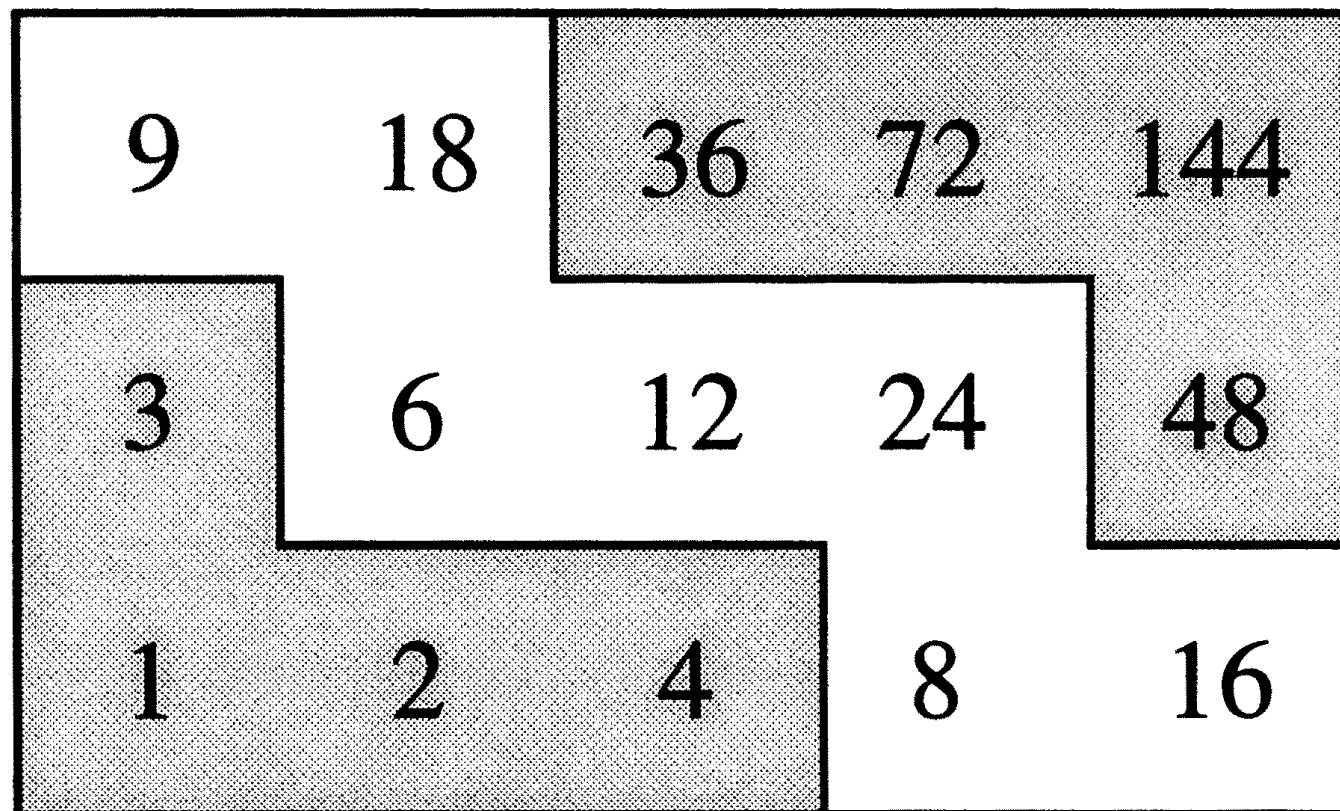
Lambda

- *Interprétation musicale*



Lambda

- *Interprétation musicale*

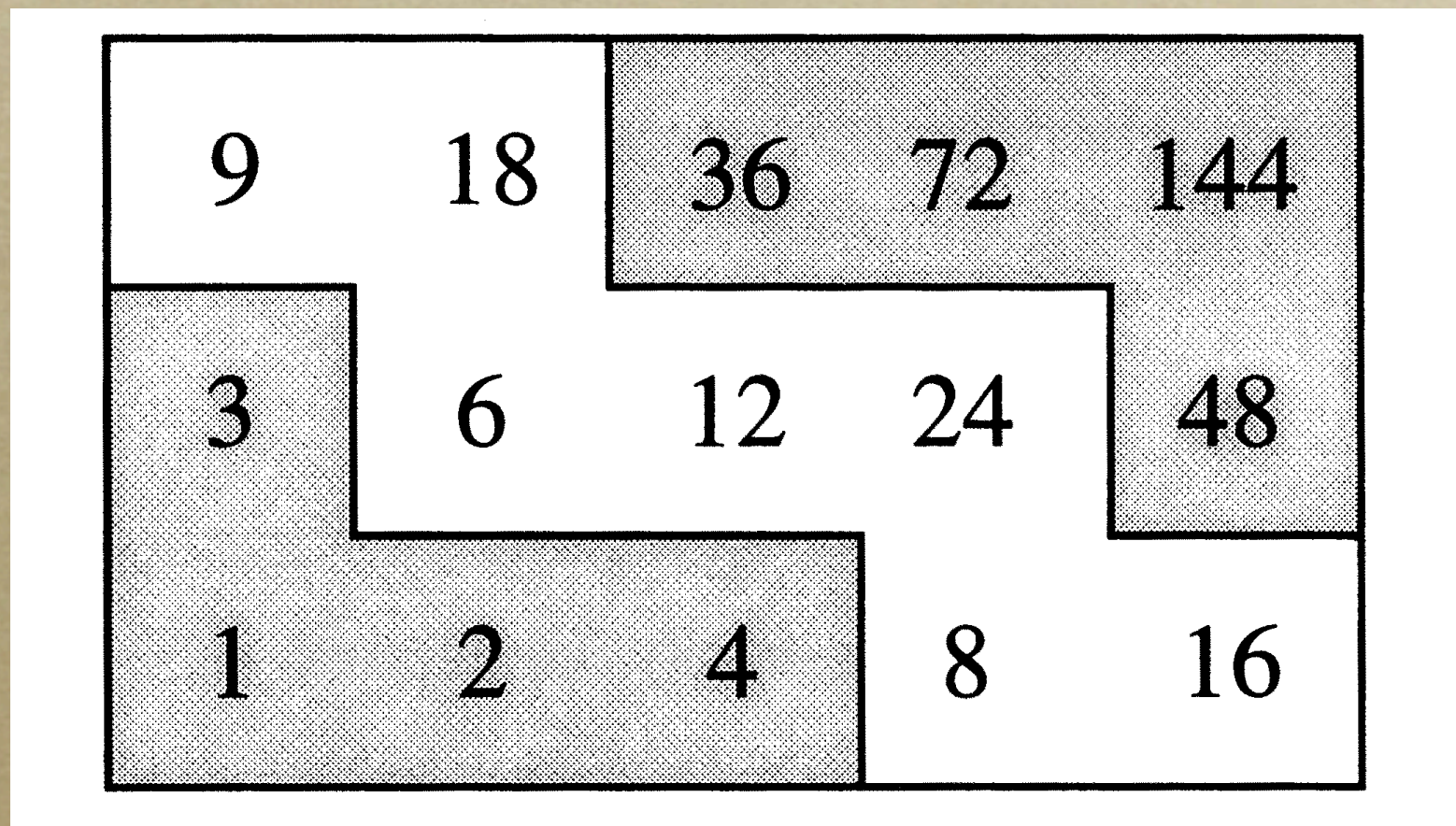


A 3x5 grid of numbers. The cells are shaded in a staircase pattern: the top row has the last three cells shaded; the middle row has the first, third, fourth, and fifth cells shaded; the bottom row has the first three cells shaded. The numbers in the grid are as follows:

9	18	36	72	144
3	6	12	24	48
1	2	4	8	16

Lambda

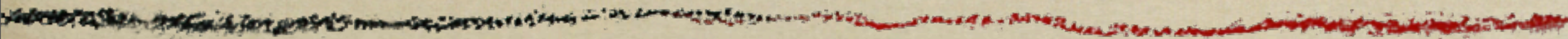
- *Interprétation musicale*



Region: Carey/Clampitt 1996

(= symétrique et connexe entre 2^a et 3^b)

Lambda



Lambda

- *Une définition enfin !*

Lambda

- *Une définition enfin !*

*Soit $(M, \times)$ le monoïde libre engendré par 2 et 3,
i.e. $\{2^a 3^b \mid a, b \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}^*$.*

On l'ordonne:

$$M = \{1=m_0, 2=m_1, \dots, m_n < m_{n+1} < \dots\}$$

Lambda

- *Une définition enfin !*

*Soit $(M, \times)$ le monoïde libre engendré par 2 et 3,
i.e. $\{2^a 3^b \mid a, b \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}^*$.*

On l'ordonne:

$$M = \{1=m_0, 2=m_1, \dots, m_n < m_{n+1} < \dots\}$$

- *La suite des intervalles de M est*
$$S=(m_1/m_0, m_2/m_1, \dots, m_{n+1}/m_n \dots)$$

Lambda

- *Une définition enfin !*

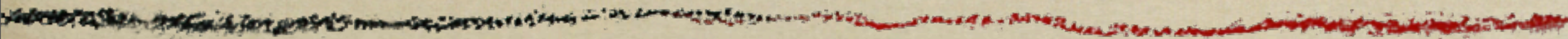
*Soit $(M, \times)$ le monoïde libre engendré par 2 et 3,
i.e. $\{2^a 3^b \mid a, b \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}^*$.*

On l'ordonne:

$$M = \{1=m_0, 2=m_1, \dots, m_n < m_{n+1} < \dots\}$$

- *La suite des intervalles de M est*
$$S = (m_1/m_0, m_2/m_1, \dots, m_{n+1}/m_n, \dots)$$
- *Le mot Lambda est créé en indexant S par ordre d'apparition de ses éléments.*

Lambda



Lambda

- *Définition simplifiée et généralisée:*

Lambda

- *Définition simplifiée et généralisée:*
- *En prenant les logarithmes, on considère un monoïde libre additif, engendré par $\ln 2$ et $\ln 3$, ou à homothétie près $\{x + y \log_2 3 / x, y \in \mathbb{N}\}$. Plus généralement on peut considérer $\text{spdg } M_\Theta = \{x + y \Theta / x, y \in \mathbb{N}\}$ pour tout Θ irrationnel et la séquence des différences successives.*

Lambda

- *Définition simplifiée et généralisée:*
- *En prenant les logarithmes, on considère un monoïde libre additif, engendré par $\ln 2$ et $\ln 3$, ou à homothétie près $\{x + y \log_2 3 / x, y \in \mathbb{N}\}$. Plus généralement on peut considérer $\text{spdg } M_\Theta = \{x + y \Theta / x, y \in \mathbb{N}\}$ pour tout Θ irrationnel et la séquence des différences successives.*
- *(techniquement on se limite à $1 < \Theta < 2$. Sauf spécification on gardera la valeur «musicale» de Θ)*

Lambda

- *Définition simplifiée et généralisée:*
- *En prenant les logarithmes, on considère un monoïde libre additif, engendré par $\ln 2$ et $\ln 3$, ou à homothétie près $\{x + y \log_2 3 / x, y \in \mathbb{N}\}$. Plus généralement on peut considérer $\text{spdg } M_\Theta = \{x + y \Theta / x, y \in \mathbb{N}\}$ pour tout Θ irrationnel et la séquence des différences successives.*
- *(techniquement on se limite à $1 < \Theta < 2$. Sauf spécification on gardera la valeur «musicale» de Θ)*
 $\Theta = 1,584962500721\dots$

Regardons Lambda

Regardons Lambda

[illegible]

Regardons Lambda

$\Lambda =$ abcbcdccdcddeddeddedddfdde
ddfdddfdffddfdffdfgddfdffdfgfdffgfd
dfgfdffgfdffgfdffgfdffgfdffgfdffgfdffg
fgffgfdffgfdffgfdffgfdffgfdffgfdffgfdffg
gffhffgffhffgffhffgffhffgffhffgffhffgffhffh
ffgffhffhffhffhffgffhffhffhffhffhffhffhffhffh
ffhffhffhffhffhffhffhffhffhffhffhffhffhffhffh...

Regardons Lambda

$\Lambda = \text{abc} \text{bcdccdcddeddeddedddfdde}$
ddfdddfdddfdddfdffgddfdffgfdffgfd
dfgfdffgfdffgfdffgfdffgfdffgfdffg
fgffgffgffgffgffgffgffgffgffgffgffg
gffhffgffhffgffhffgffhffgffhffgffhffh
ffgffhffhffhffgffhffhffhffhffhffhffh
ffhffhffhffhffhffhffhffhffhffhffhffh...

Regardons Lambda

$\Lambda =$ **a****b****c****d****c****c****d****c****d****e****d****d****e****d****d****e****d****d****e**
d d f d d d f d d d f d d d f g d d f d d f g f d f g f d
d f g f d f g f g f d f g f g f d f g f g f f g f g f d f g f g f f g
f g f g f f g f g f f g f g f g f f g f g f f h f f g f g f f g f g f f h f f g f
g f f h f f g f f h f f g f g f f h f f g f f h f f h f f g f f h f f g f f h f f h
f f g f f h f f h f f f h f f h f f g f f h f f h f f f h f f h f f h f f f h f f h f
f f h f f h f f h f f f h f f h f f h i f f h f f h f f f h f f h f f h i ...

Regardons Lambda

$\Lambda =$ **a****b****c****d****c****c****d****c****d****e****d****c****d****e****d****e****d****d****e****d****d****e**
d d f d d d f d d d f d d d f g f d d f d d f g f d d f g f d f g f d
d f g f d f g f g f d f g f d f g f g f f g f g f d f g f g f f g
f g f g f f g f g f f g f g f g f f g f g f f h f f g f g f f g f g f f h f f g f
g f f h f f g f f h f f g f g f f h f f g f f h f f h f f g f f h f f g f f h f f h
f f g f f h f f h f f f h f f h f f g f f h f f h f f f h f f h f f h f f f h f f h f
f f h f f h f f h f f f h f f h f f h i f f h f f h f f f h f f h f f h i ...

Regardons Lambda

[illegible]

Regardons Lambda

$\Lambda =$ abcbcdccddeddecdedeeddffde
ddfdddfdffddfdffgfdffdfgfdfgfd
dfgfdgfgfdgfdgfgffgfgfdgfgffg
fgfgffgfgffgfgffgfhffgfgffgfhffgf
gfhffgfhffgfhffgfhffgfhffgfhffh
ffgfhffhfffhffhffgfhffhfffhffhffh
ffhffhffhfffhffhffhihffhffhfffhffhffhi...

Regardons Lambda

[illegible]

Regardons Lambda

[illegible]

Regardons Lambda

$$\Lambda = \text{abc bcd ccd dcd edd fde e} \\ \text{ddfd ddf ddd fddf g fddf dfdfg fd} \\ \text{dfgfd fgfdfgfd fgffgfgf dfgfgffg} \\ \text{fgfgffgfgffgfgff hffgfgffghffgf} \\ \text{gffhffgffhffgffhffhffgffhffhffh} \\ \text{ffgffhffhfffhffhffgffhffhfffhffhf} \\ \text{ffhffhffhfffhffhihffhffhfffhffhi...}$$

Regardons Lambda

[illegible]

Regardons Lambda

[illegible]

hffhffhfffhffhffh

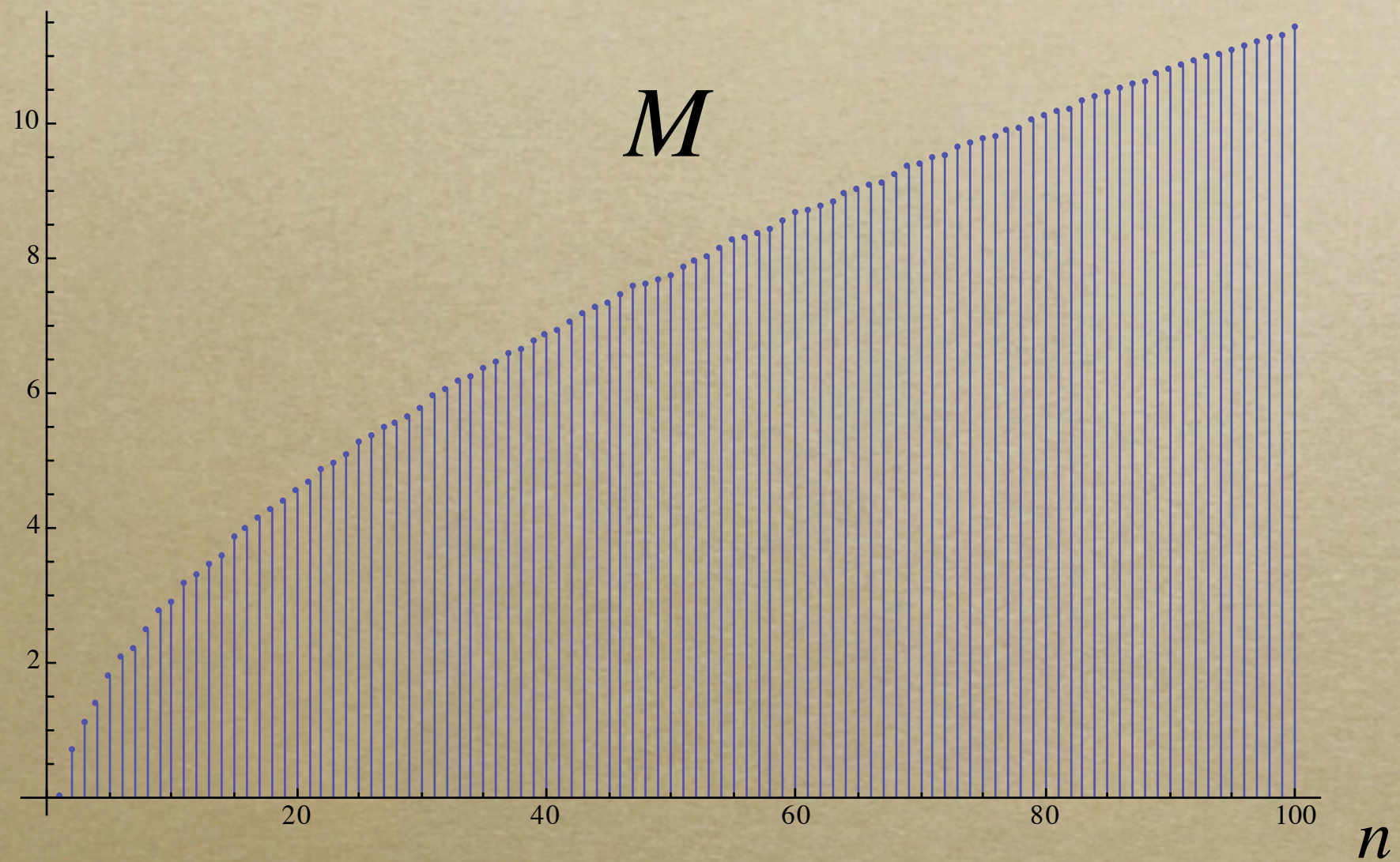
Regardons Lambda

[illegible]

hffhffhfffhffhffh dtdtdtdtdtdtdtd

Λ à l'infini

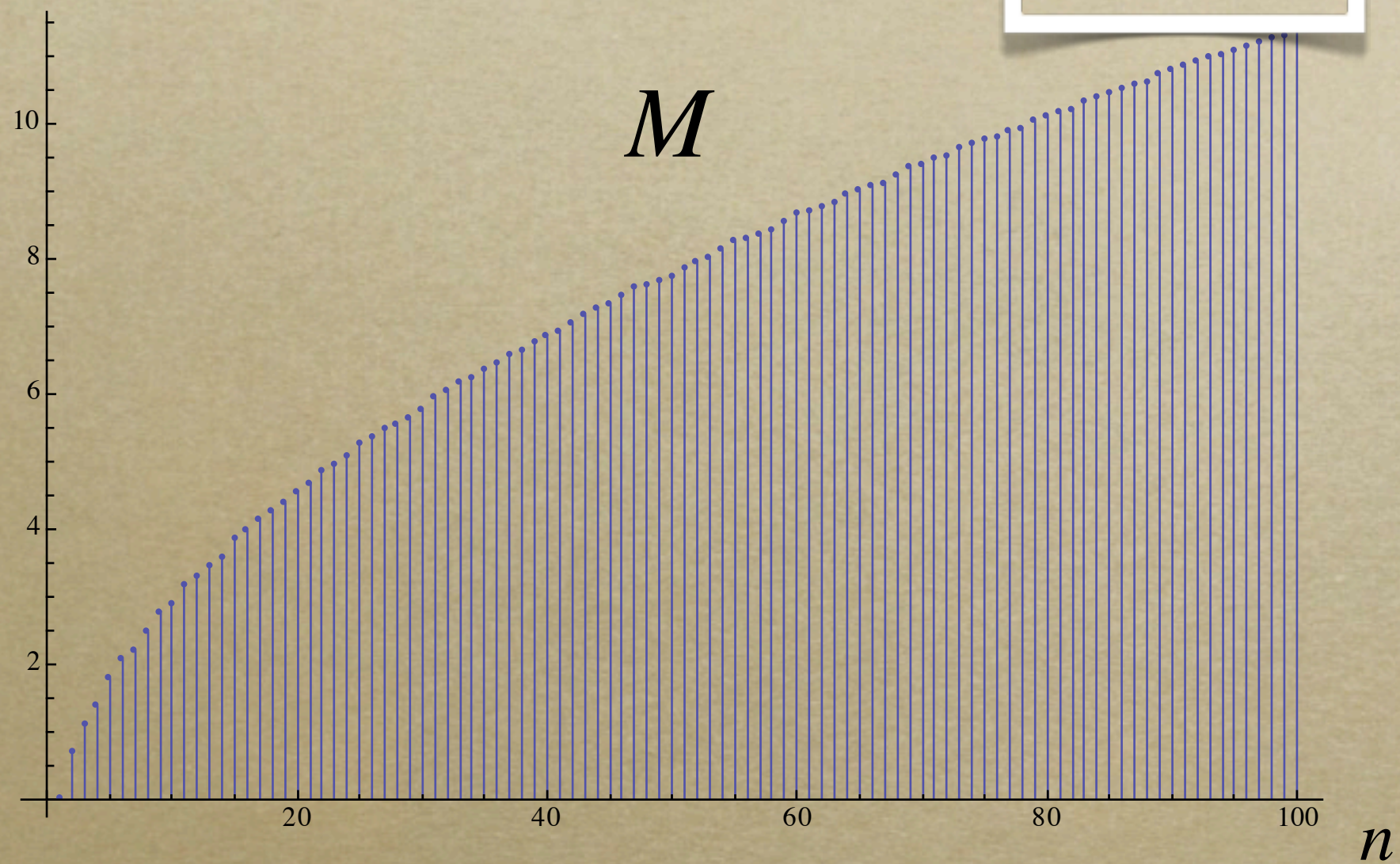
$$m_n = x_n + y_n \Theta$$



Λ à l'infini

$$m_n = x_n + y_n \Theta$$

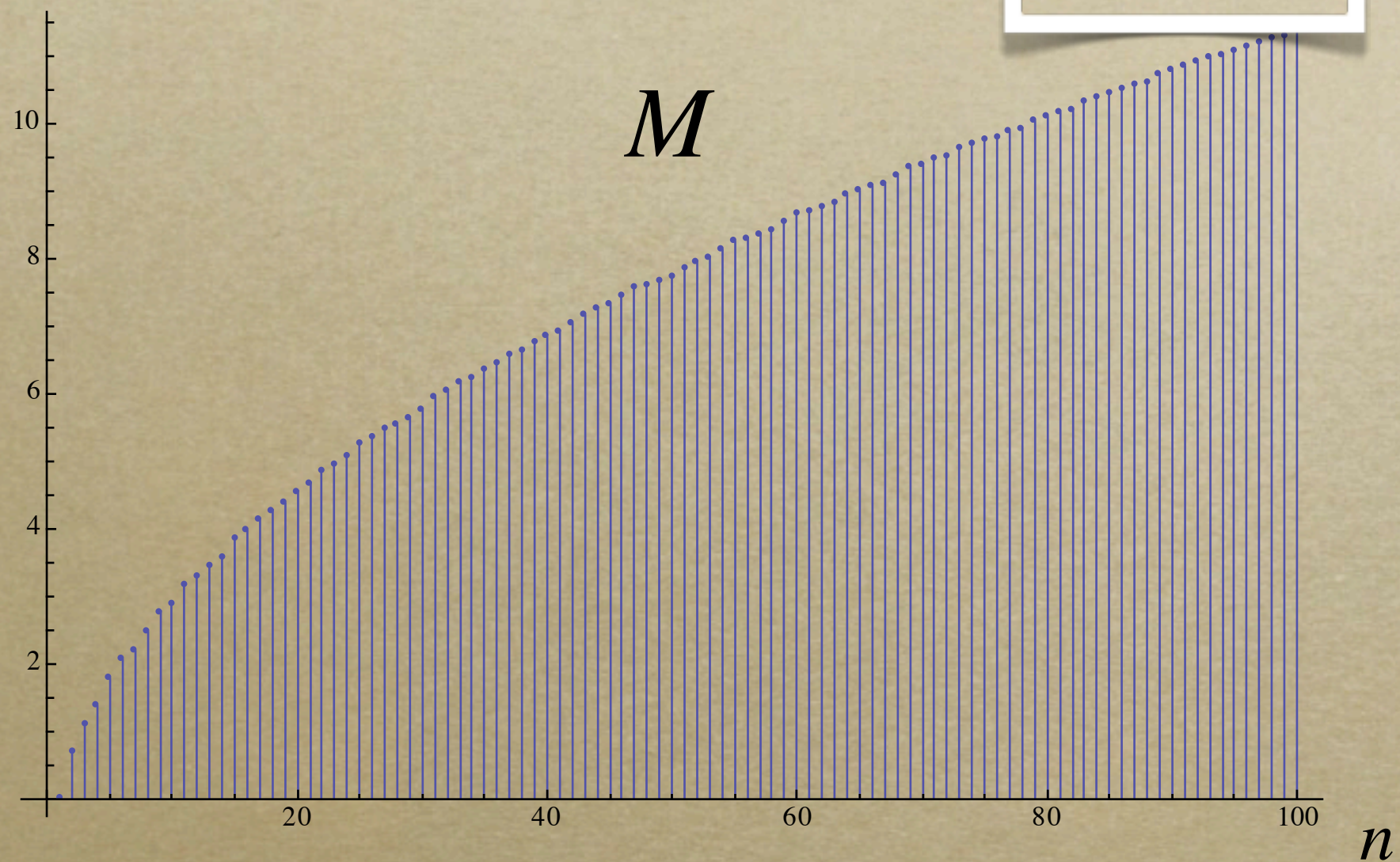
$$m_n \rightarrow \infty$$



Λ à l'infini

$$m_n = x_n + y_n \Theta$$

$$m_n \rightarrow \infty$$

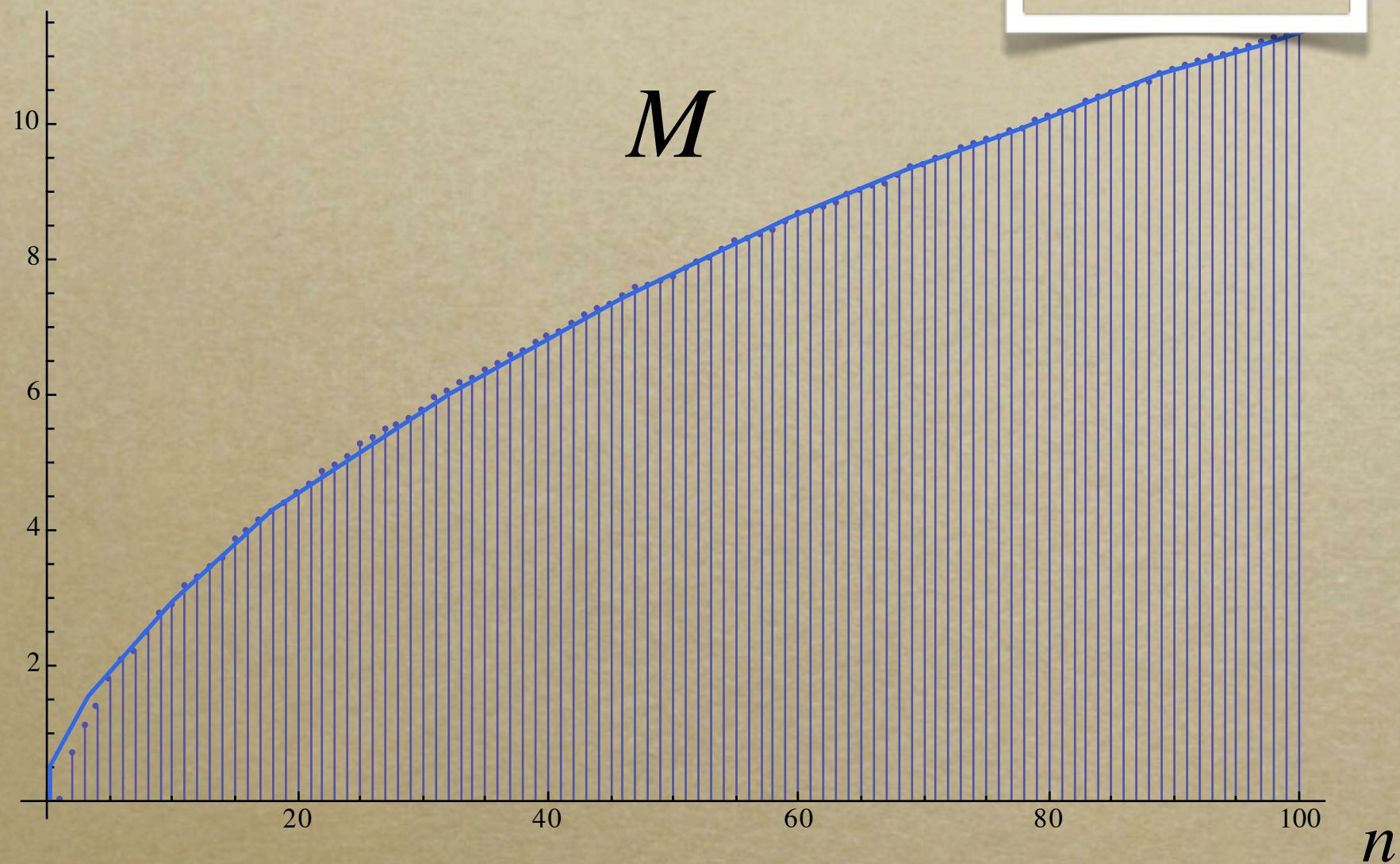


$$m_{n+1} - m_n \rightarrow 0$$

Λ à l'infini

$$m_n = x_n + y_n \Theta$$

$$m_n \rightarrow \infty \sim \sqrt{2 n \theta}$$

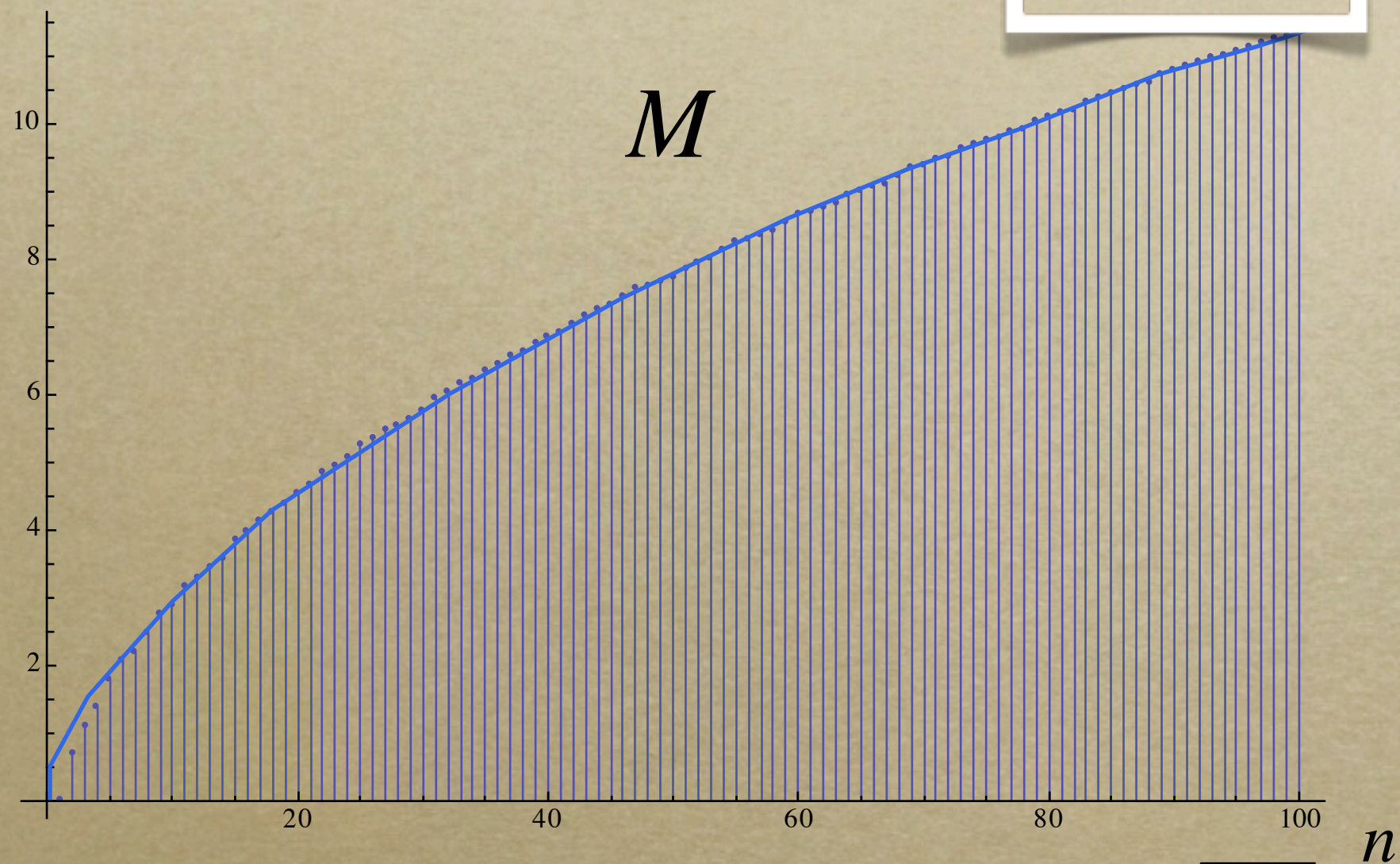


$$m_{n+1} - m_n \rightarrow 0$$

Λ à l'infini

$$m_n = x_n + y_n \Theta$$

$$m_n \rightarrow \infty \sim \sqrt{2 n \theta}$$

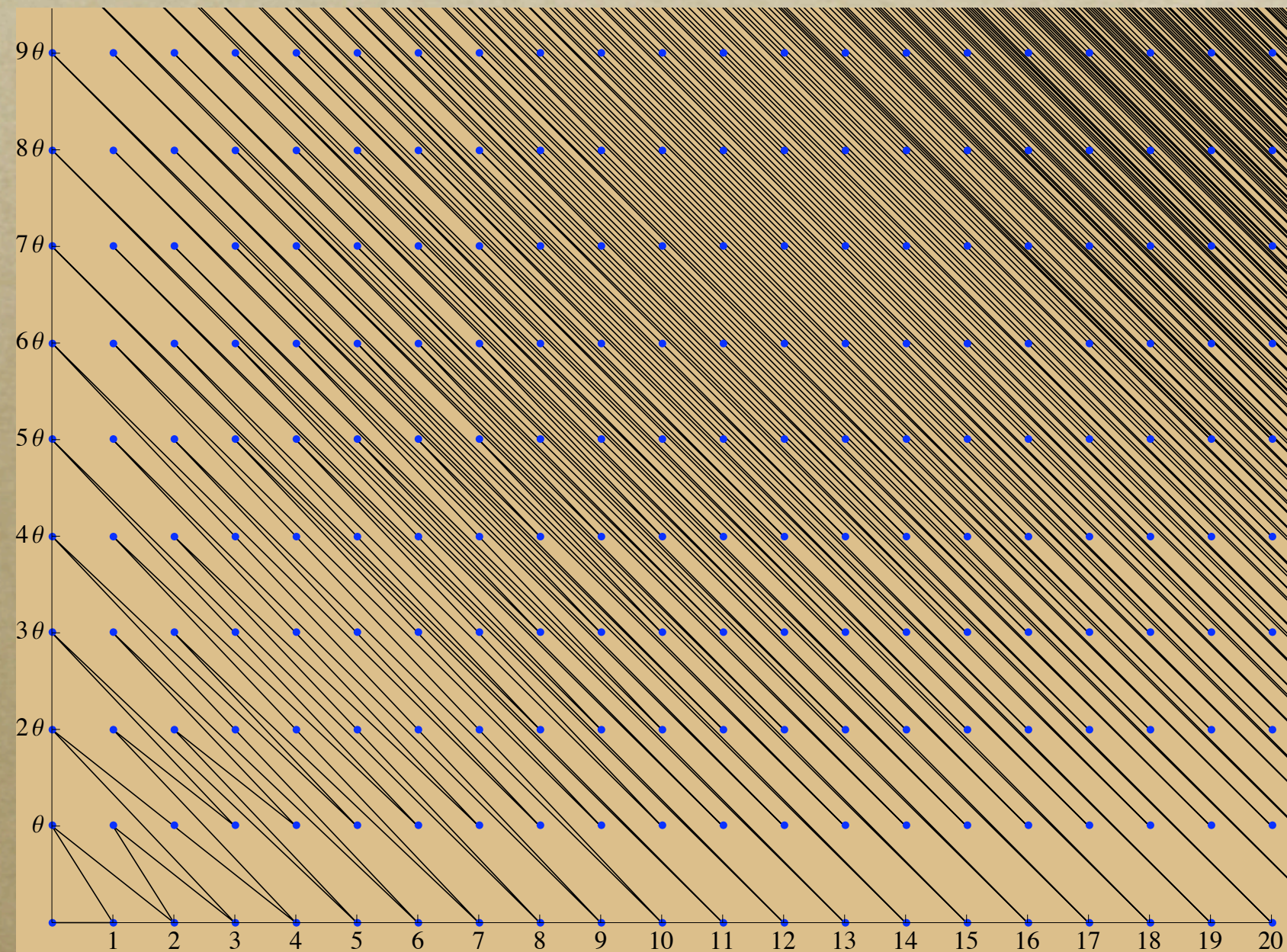


$$m_{n+1} - m_n \rightarrow 0$$

$$\approx \sqrt{\frac{\theta}{2 n}}$$

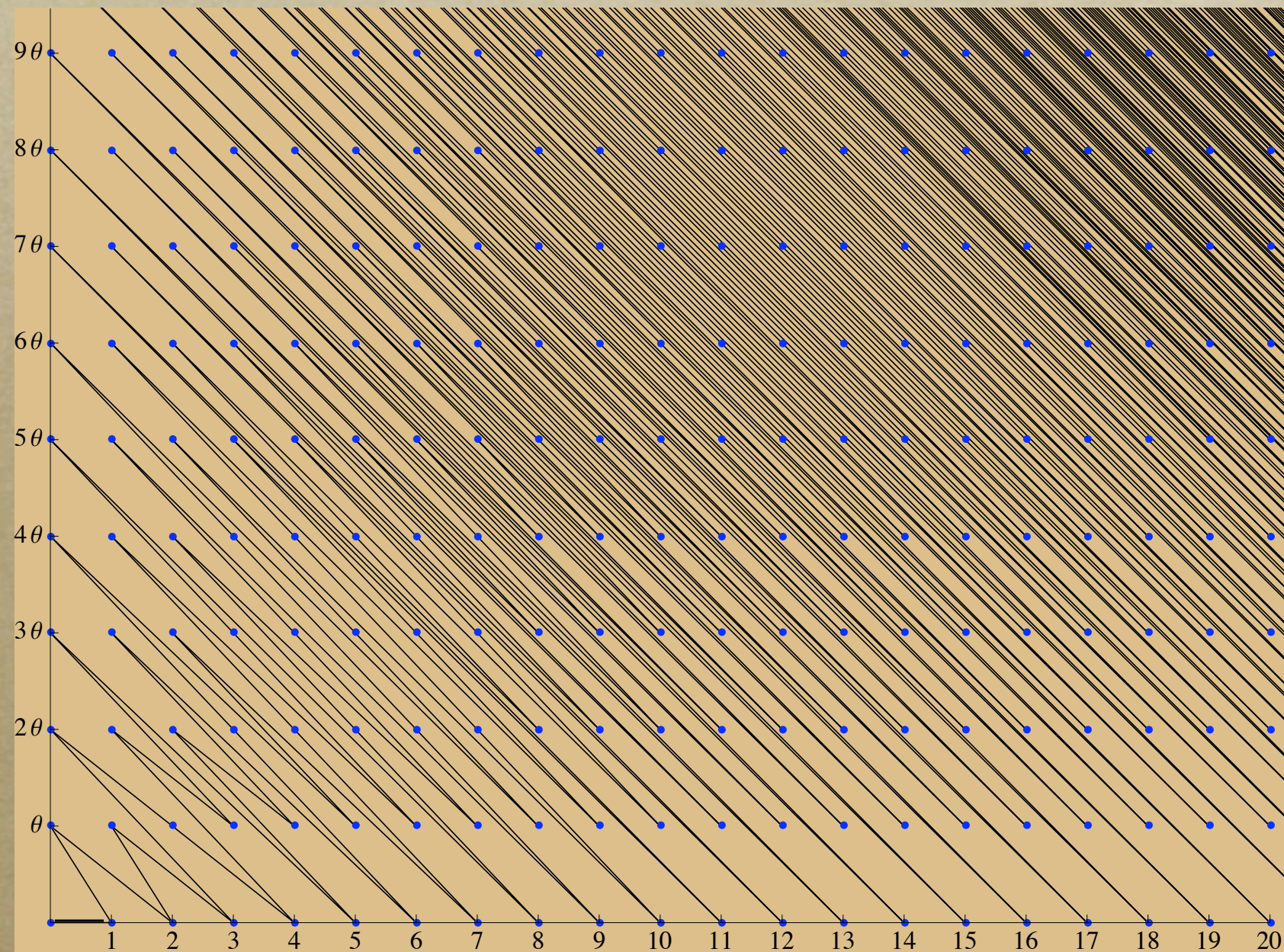
Λ en 2D

Λ en 2D

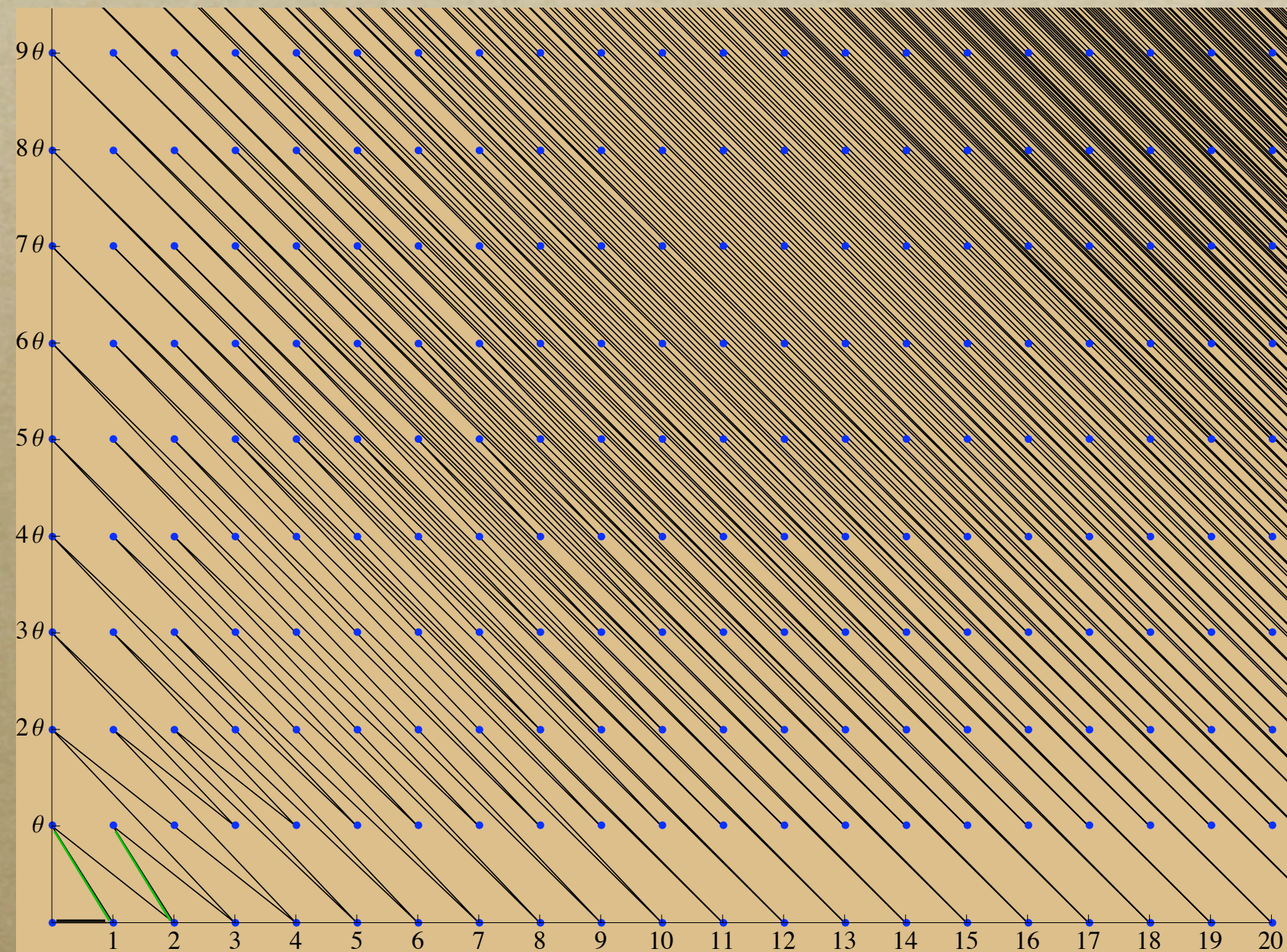


Λ en 2D

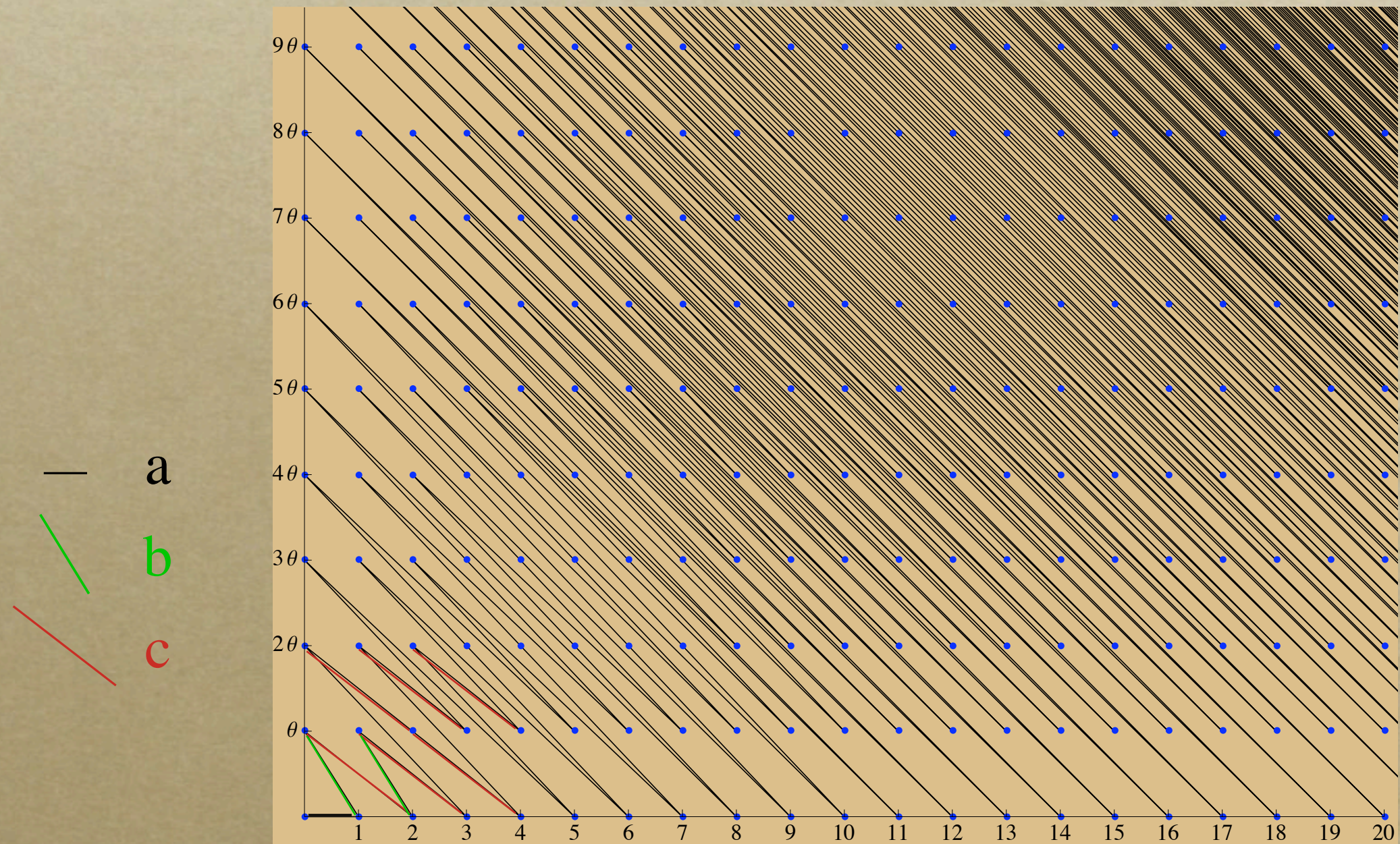
— a



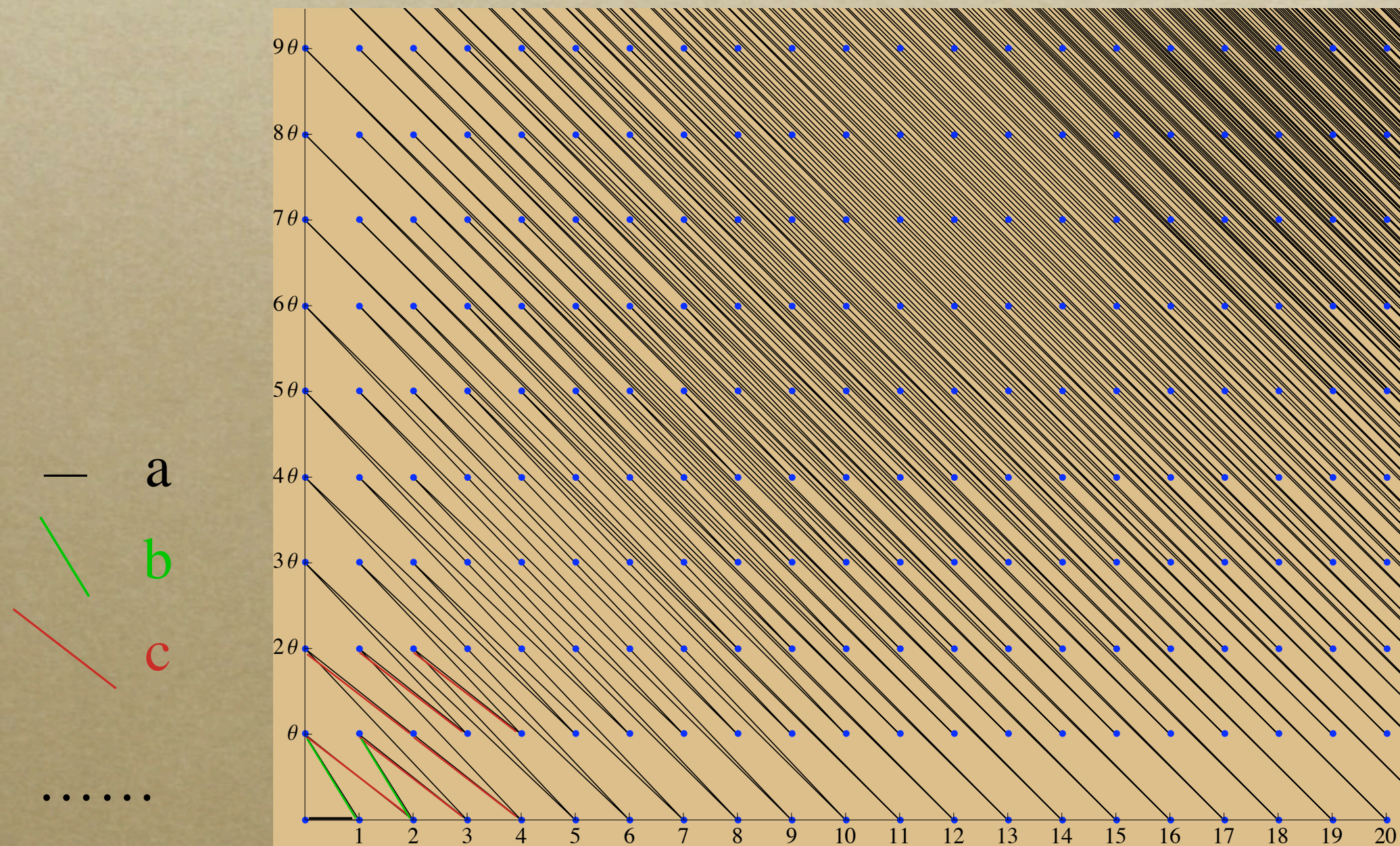
Λ en 2D



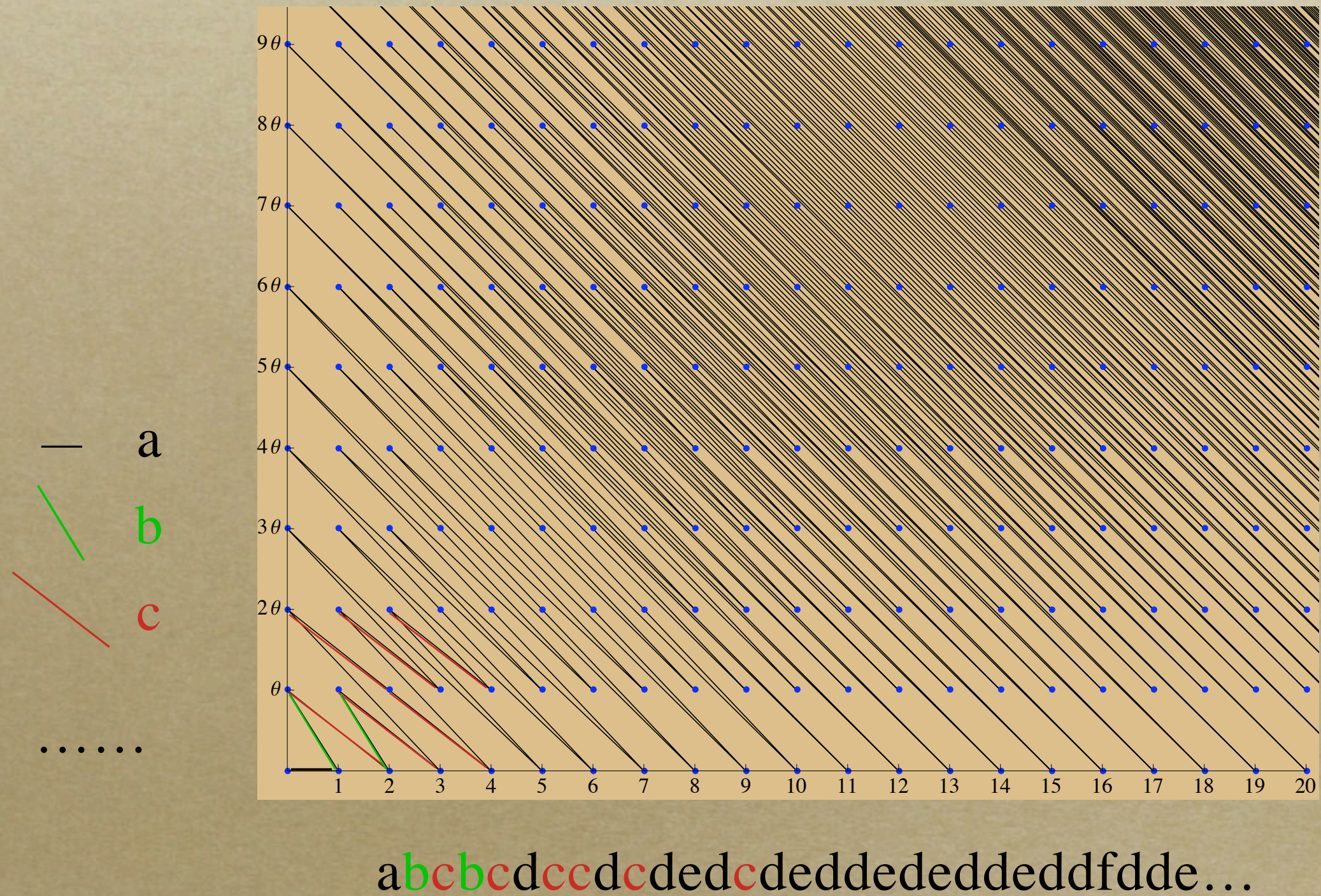
Λ en 2D



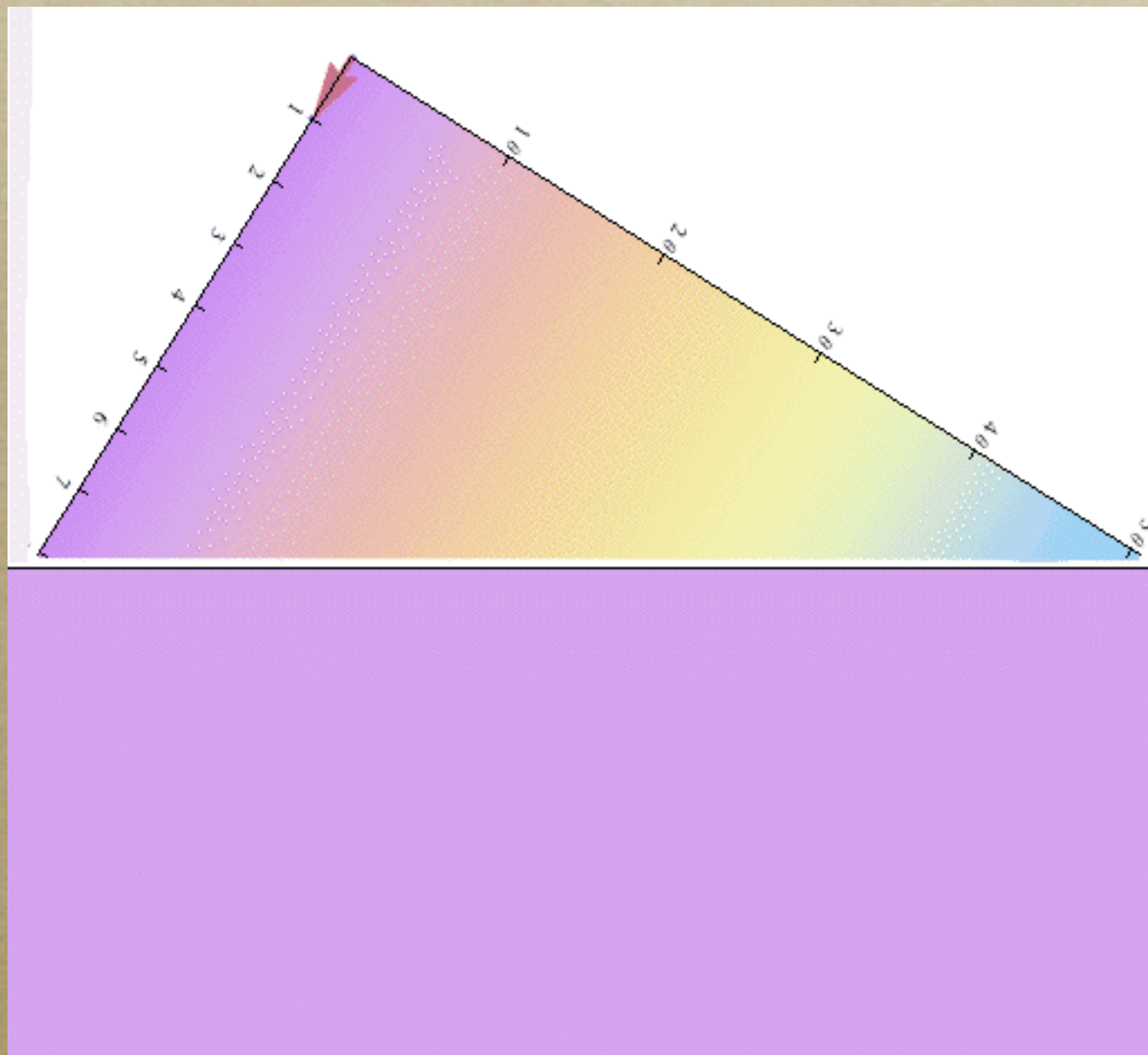
Λ en 2D



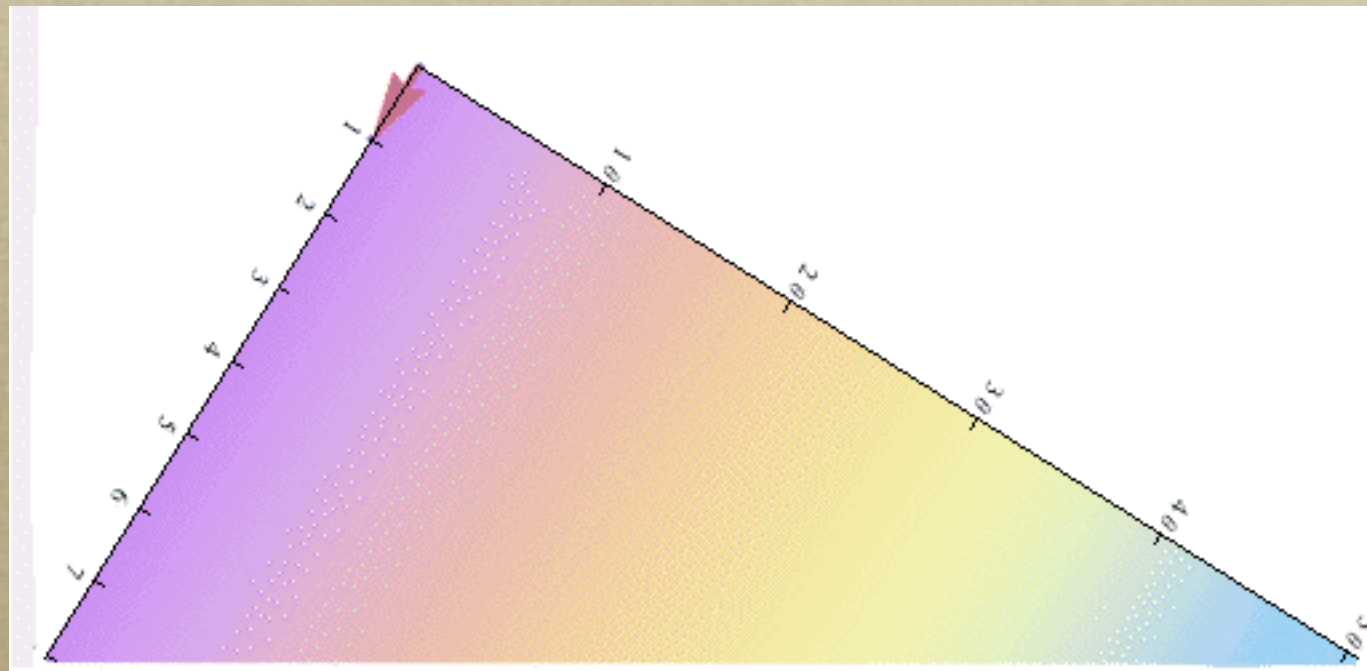
Λ en 2D



Λ en 2D (dynamique)



Λ en 2D (dynamique)



Λ parcourt un (quart de) réseau
par valeurs croissantes (mais le
moins possible !) de la forme
linéaire $(x,y) \rightarrow x + \Theta y$

Λ en 2D: conséquences

Λ en 2D: conséquences

- *Comme il y a de plus en plus de place, les différences $\partial_n = (x_{n+1} + y_{n+1} \Theta) - (x_n + y_n \Theta)$ tendent vers 0, et donc Λ a une infinité de lettres.*

Λ en 2D: conséquences

- *Comme il y a de plus en plus de place, les différences $\partial_n = (x_{n+1} + y_{n+1} \Theta) - (x_n + y_n \Theta)$ tendent vers 0, et donc Λ a une infinité de lettres.*
- *Chaque lettre apparaît un nombre fini de fois.*

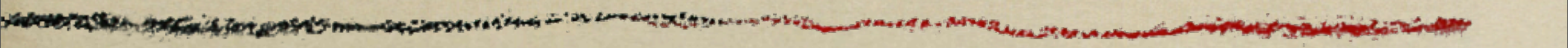
Λ en 2D: conséquences

- Comme il y a de plus en plus de place, les différences $\partial_n = (x_{n+1} + y_{n+1} \Theta) - (x_n + y_n \Theta)$ tendent vers 0, et donc Λ a une infinité de lettres.
- Chaque lettre apparaît un nombre fini de fois.
- À un instant donné il n'y a qu'un nombre fini de lettres possibles (au maximum 3).

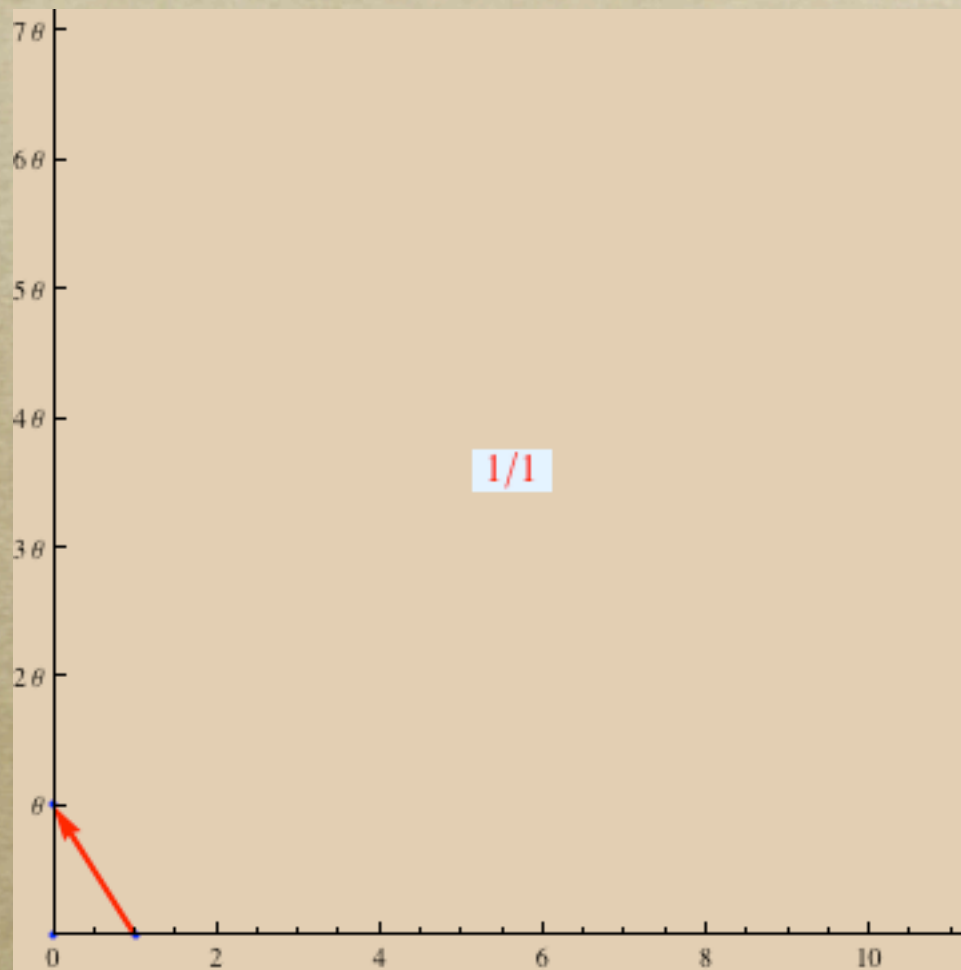
Λ en 2D: conséquences

- Comme il y a de plus en plus de place, les différences $\partial_n = (x_{n+1} + y_{n+1} \Theta) - (x_n + y_n \Theta)$ tendent vers 0, et donc Λ a une infinité de lettres.
- Chaque lettre apparaît un nombre fini de fois.
- À un instant donné il n'y a qu'un nombre fini de lettres possibles (au maximum 3).
- Chaque zig ou zag est un vecteur à coordonnées entières qui donne une pente proche de Θ
(ex. $(8, -5 \Theta)$ alias $8/5$): $(a, -b)$ ou $(-a, b)$ avec $a/b \approx \Theta$.

Λ via les réduites de Θ



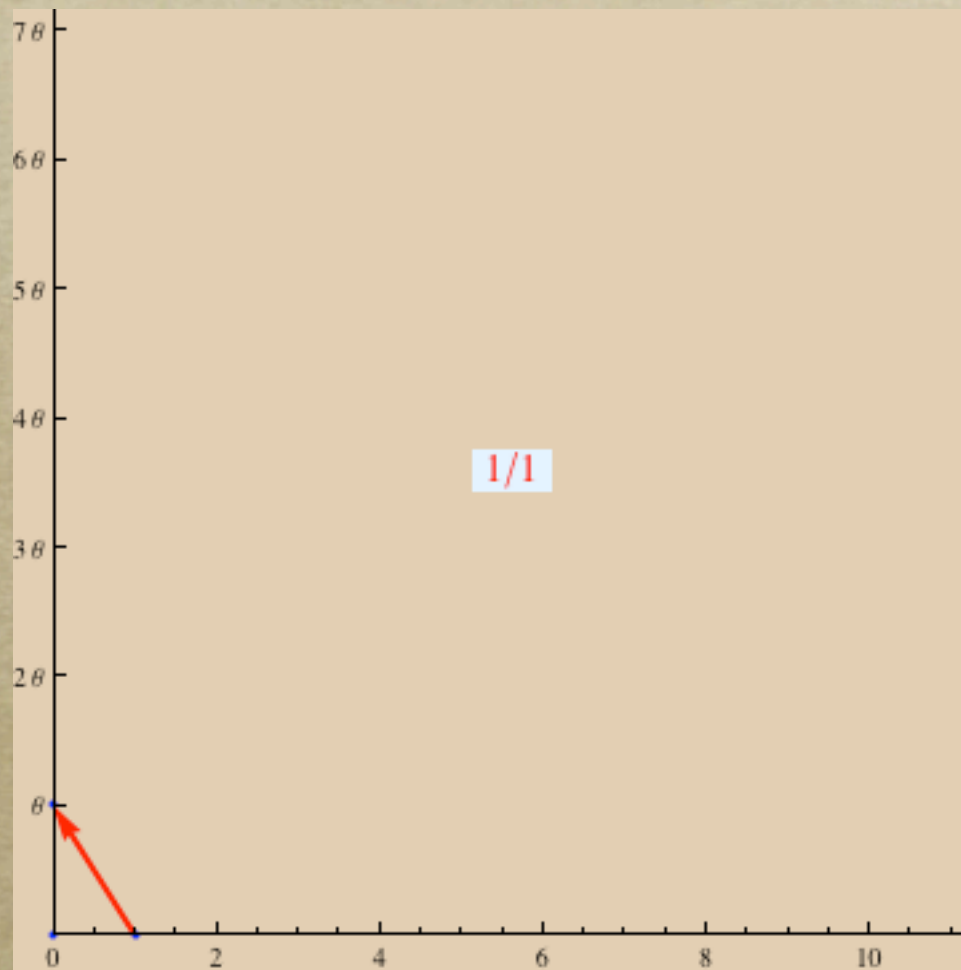
Λ via les réduites de Θ



Réduites principales, réduites intermédiaires
= fractions de meilleure approximation

Λ via les réduites de Θ

$$\Theta \approx 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\dots}}}}$$

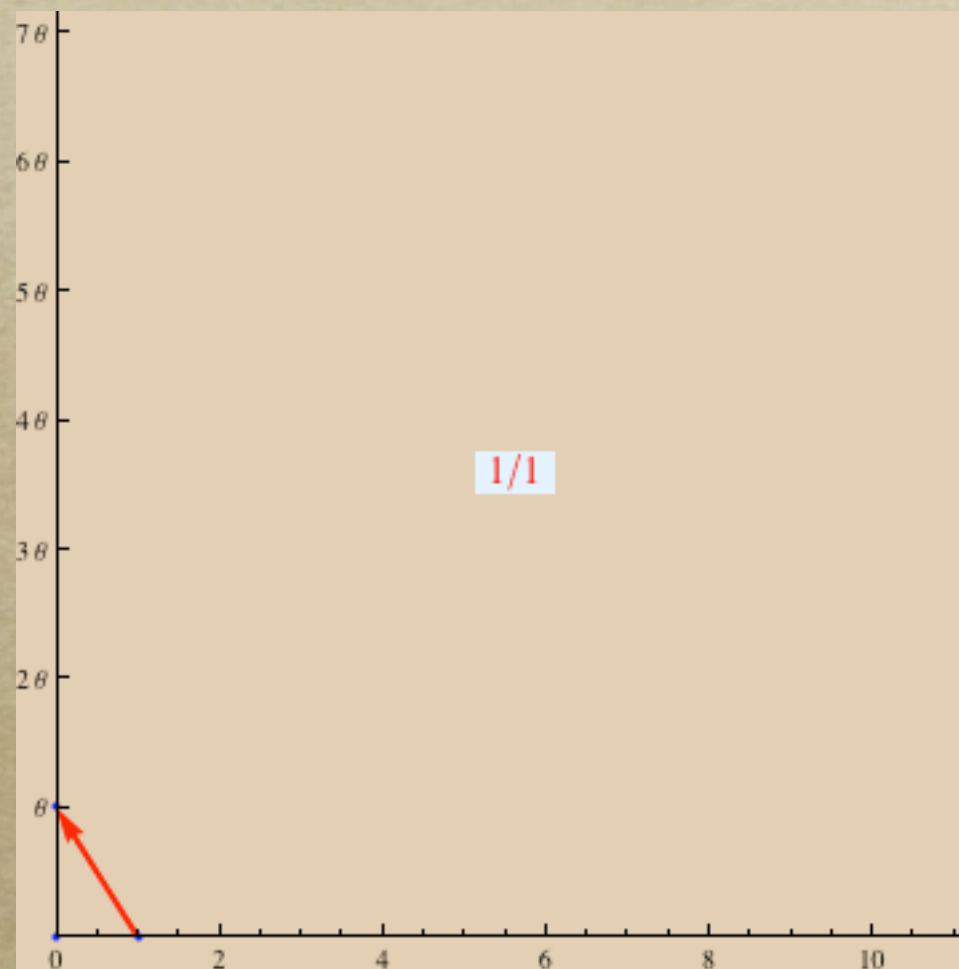


Réduites principales, réduites intermédiaires
= fractions de meilleure approximation

Λ via les réduites de Θ

$\frac{1}{1}$

$\Theta \approx 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\dots}}}}$



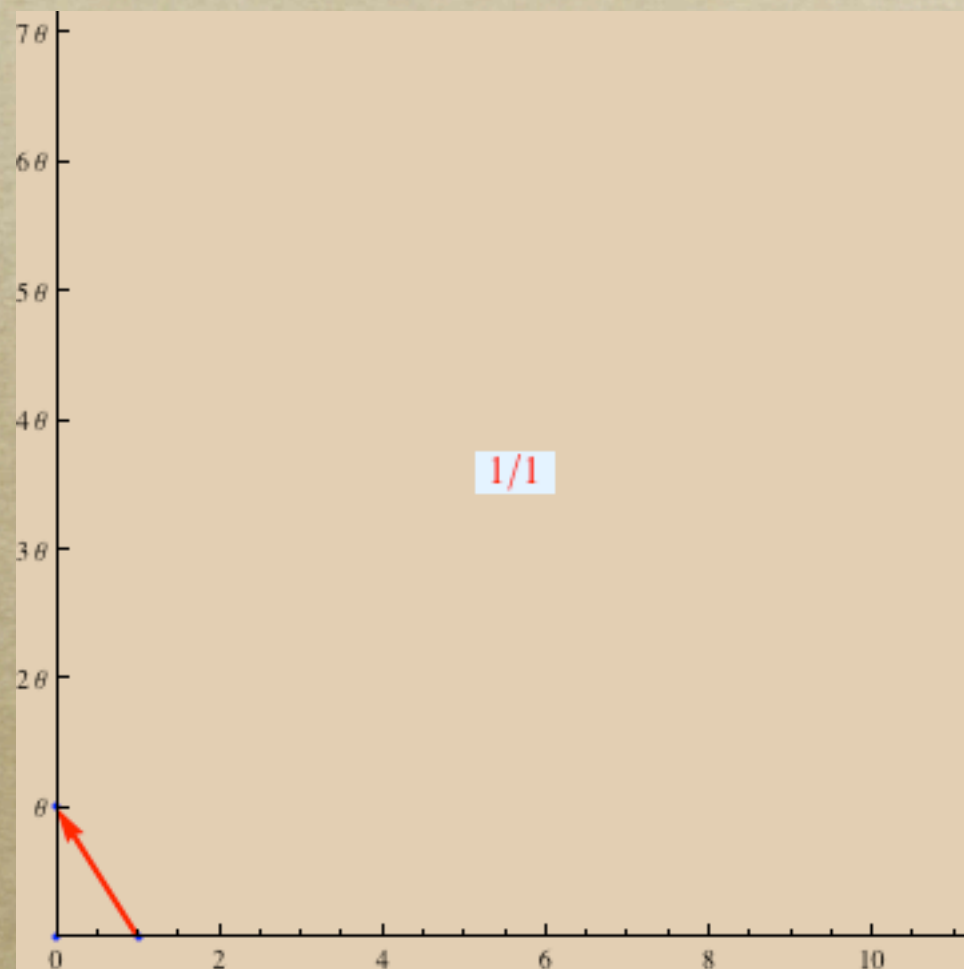
Réduites principales, réduites intermédiaires
 = fractions de meilleure approximation

Λ via les réduites de Θ

$\frac{1}{1}$

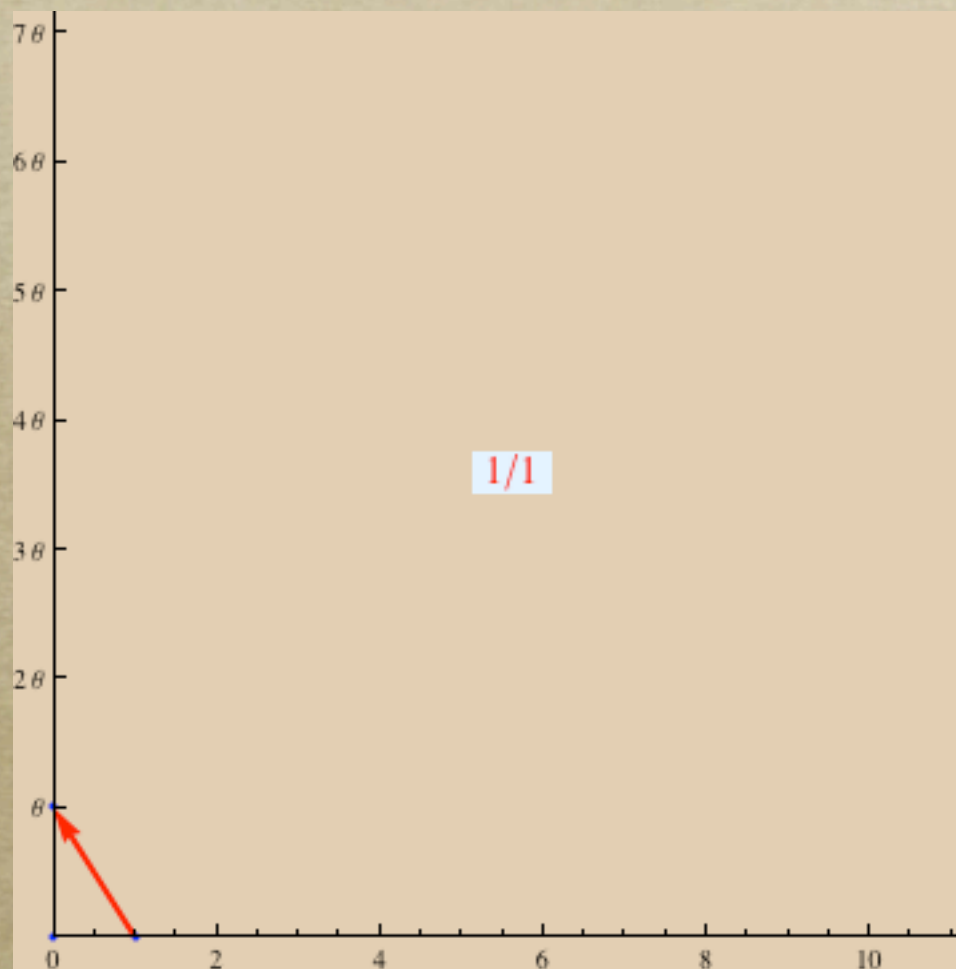
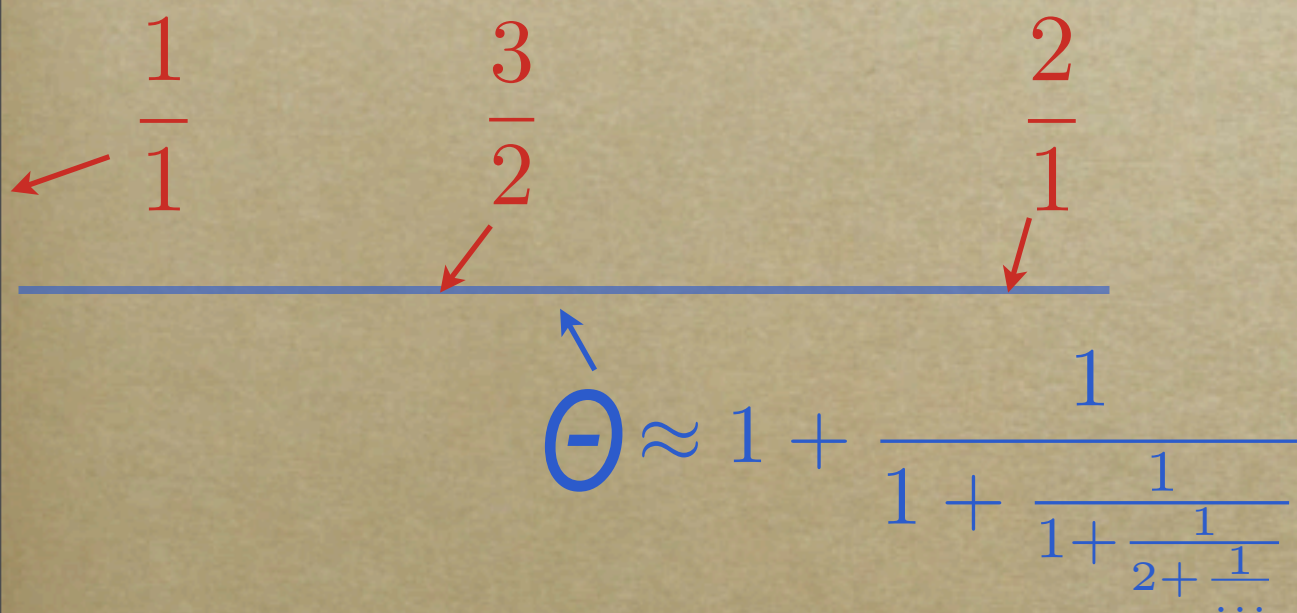
$\frac{2}{1}$

$\Theta \approx 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\dots}}}}$



Réduites principales, réduites intermédiaires
= fractions de meilleure approximation

Λ via les réduites de Θ



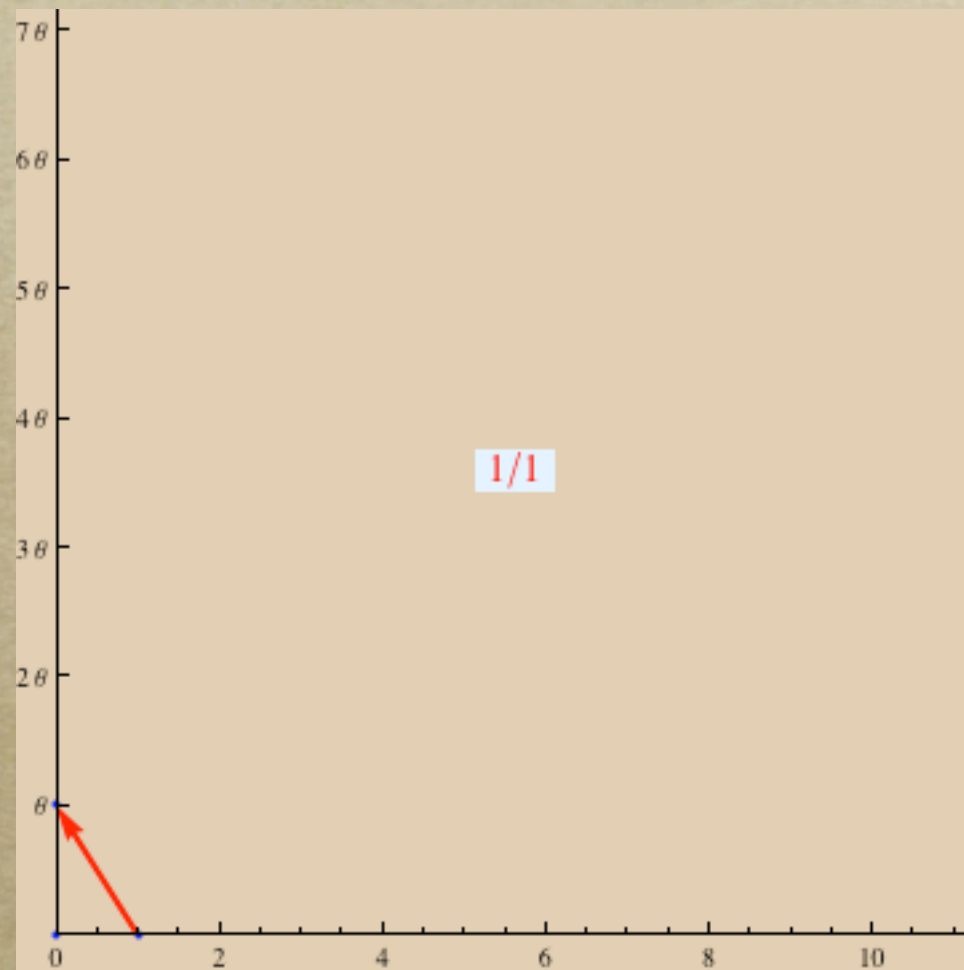
Réduites principales, réduites intermédiaires
 = fractions de meilleure approximation

Λ via les réduites de Θ

$$\Theta \approx 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\dots}}}}$$

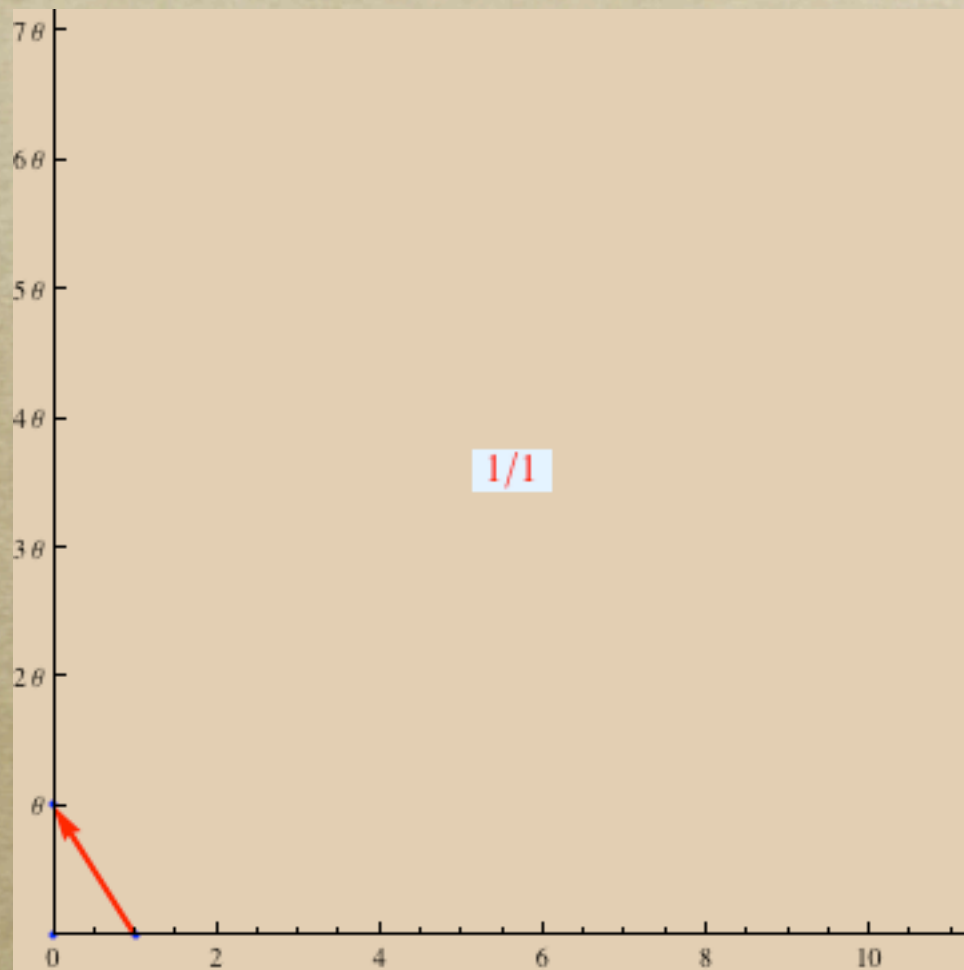
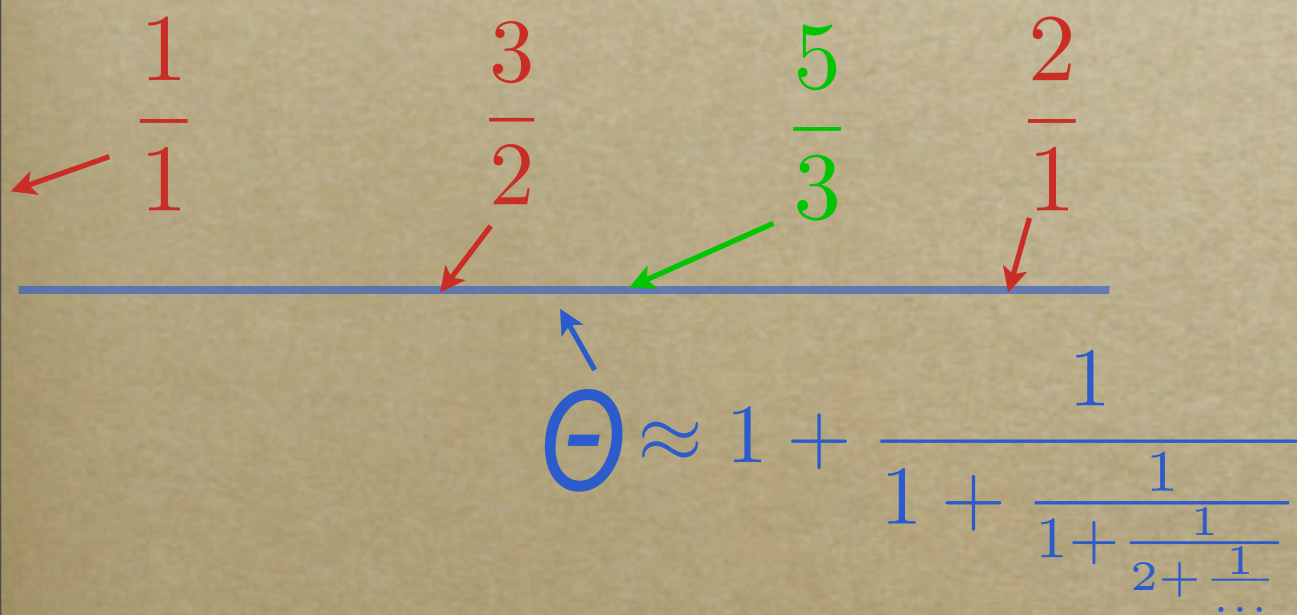
Diagram illustrating the continued fraction expansion of Θ using principal and intermediate reduced fractions:

- Principal reduced fractions (red): $\frac{1}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{1}$
- Intermediate reduced fractions (green): $\frac{3+2}{2+1} = \frac{5}{3}$



Réduites principales, réduites intermédiaires
 = fractions de meilleure approximation

Λ via les réduites de Θ



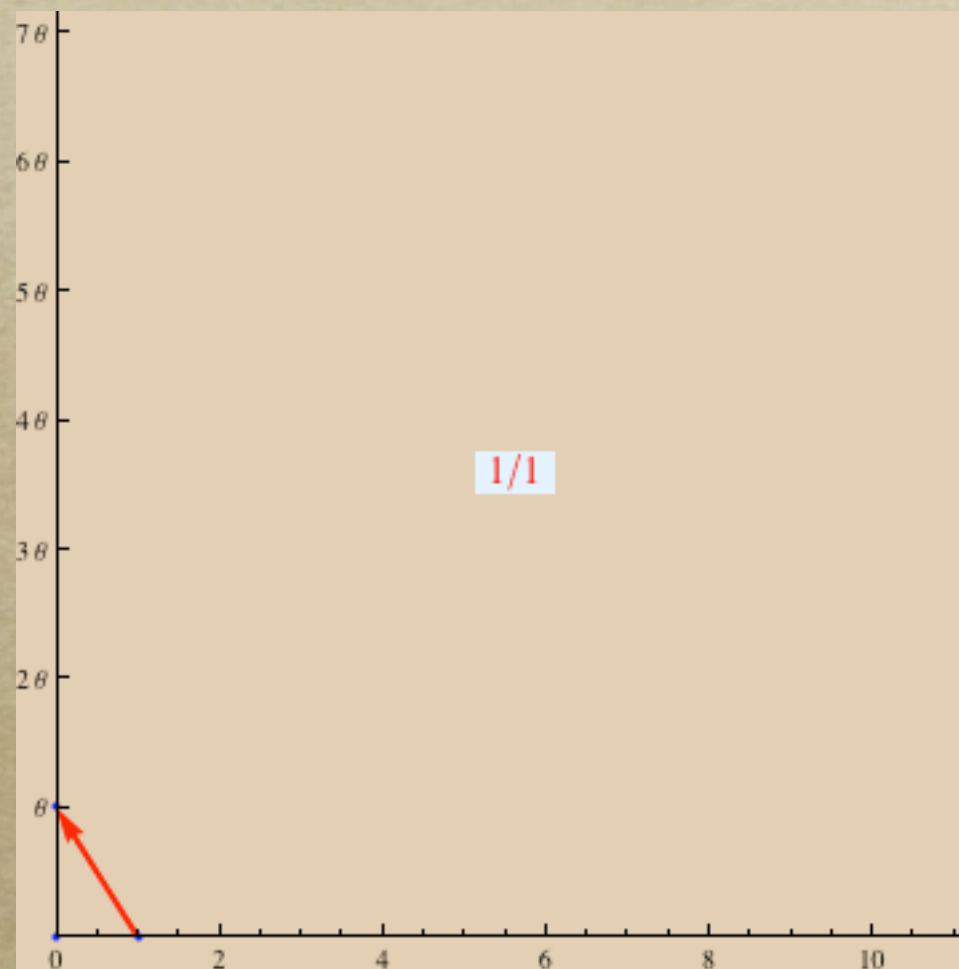
Réduites principales, réduites intermédiaires
 = fractions de meilleure approximation

Λ via les réduites de Θ

$$\frac{3 + 3 + 2}{2 + 2 + 1}$$

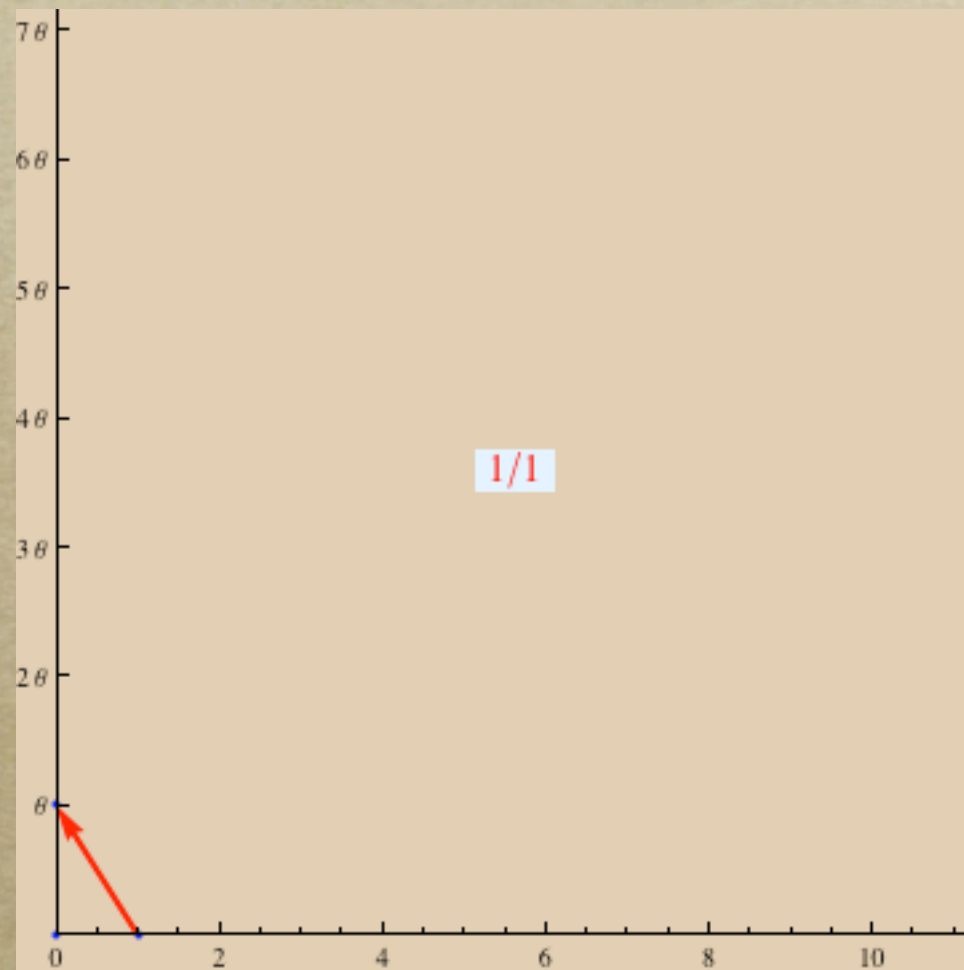
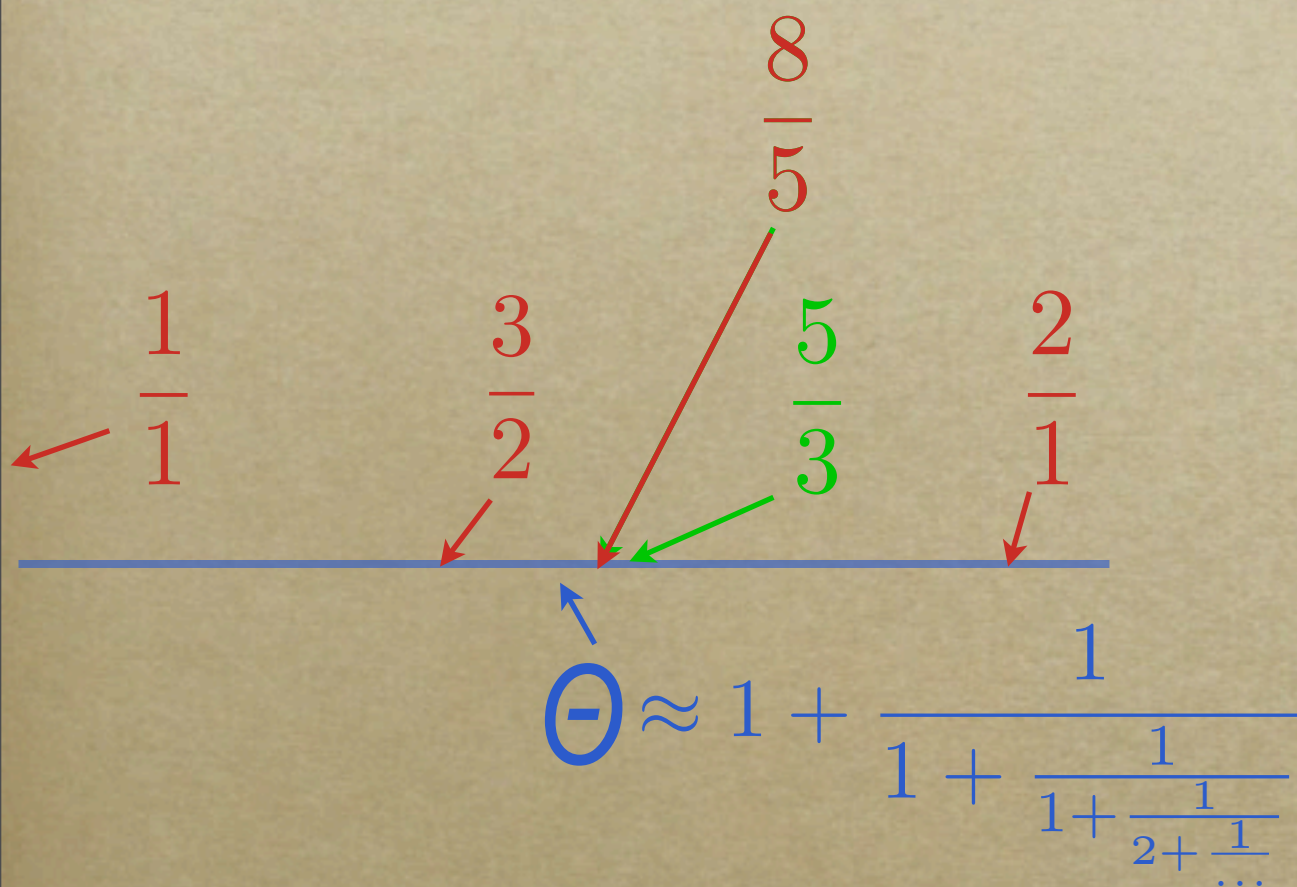
$\frac{1}{1}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{5}{3}$ $\frac{2}{1}$

$\Theta \approx 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\dots}}}}$



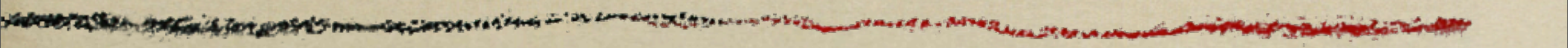
Réduites principales, réduites intermédiaires
 = fractions de meilleure approximation

Λ via les réduites de Θ



Réduites principales, réduites intermédiaires
 = fractions de meilleure approximation

Λ via les réduites de Θ



Λ via les réduites de Θ

- Thm: x et Θy sont reliés dans le graphe ssi x/y est une réduite de Θ (idem pour la différence de deux points consécutifs de M_Θ).

Λ via les réduites de Θ

- Thm: x et Θy sont reliés dans le graphe ssi x/y est une réduite de Θ (idem pour la différence de deux points consécutifs de M_Θ).
- Algorithme sans approximation décimale:
il s'agit donc de «placer» la meilleure réduite possible en fonction du point du réseau atteint.

Λ via les réduites de Θ

- Thm: x et Θy sont reliés dans le graphe ssi x/y est une réduite de Θ (idem pour la différence de deux points consécutifs de M_Θ).
- Algorithme sans approximation décimale:
il s'agit donc de «placer» la meilleure réduite possible en fonction du point du réseau atteint.
- Direction: changement de sens à chaque réduite principale

Λ via les réduites de Θ

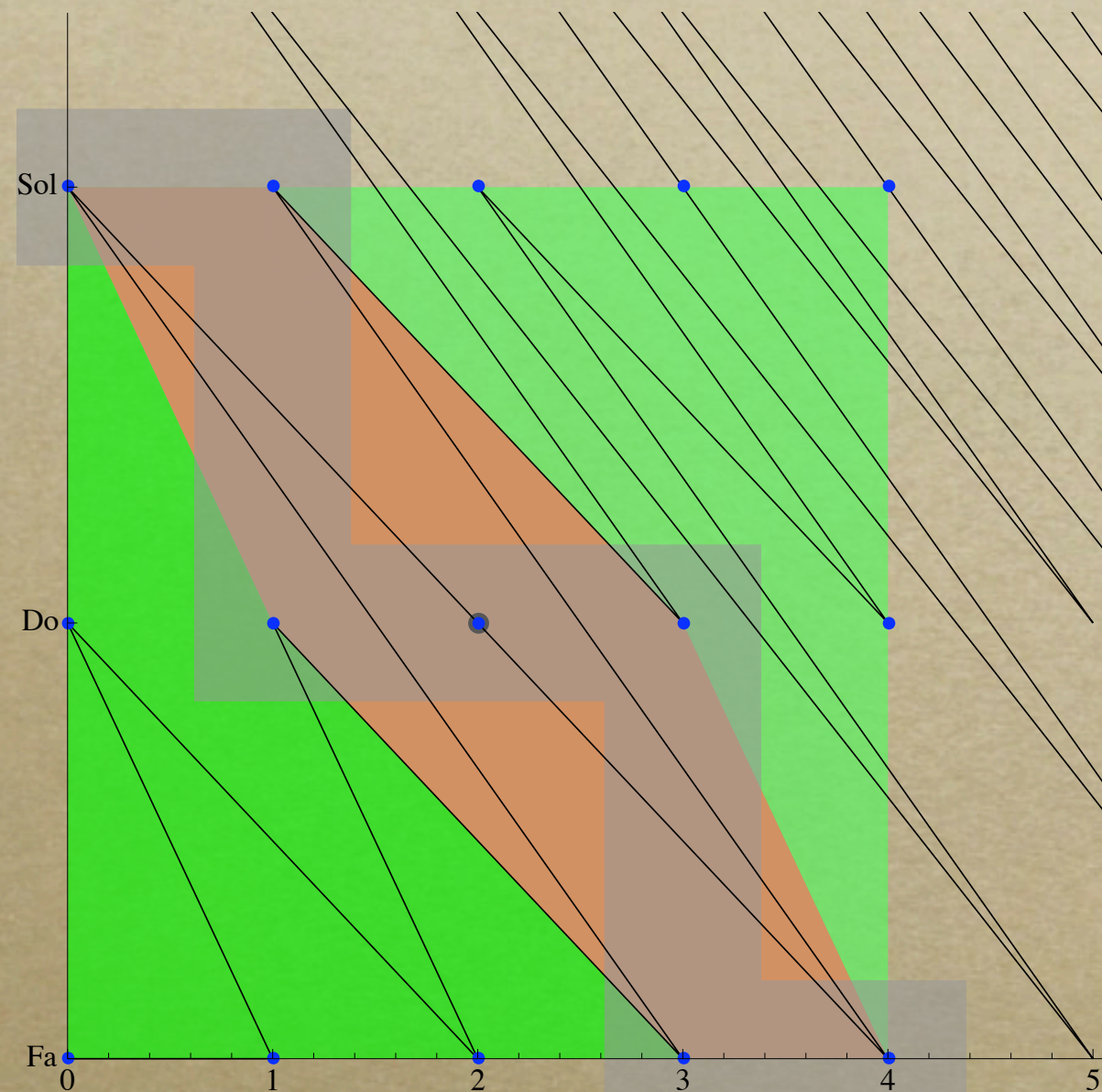
- Thm: x et Θy sont reliés dans le graphe ssi x/y est une réduite de Θ (idem pour la différence de deux points consécutifs de M_Θ).
- Algorithme sans approximation décimale:
il s'agit donc de «placer» la meilleure réduite possible en fonction du point du réseau atteint.
- Direction: changement de sens à chaque réduite principale
- Nombre d'occurrences d'une lettre: produit des facteurs de la réduite suivante ou précédente

Exemple pour l'algo

- à «l'instant» $5+2 \ominus$, les réduites à considérer sont $3/2$, $5/3$, et $8/5$. On essaye donc les vecteurs $(-3, 2)$, $(5, -3)$ et $(8, -5)$. Les deux dernières font sortir du quart de plan, donc on se déplace vers $2+4 \ominus$.
- La réduite suivante sera $11/7$, i.e. le vecteur $(-11, 7)$, qui ne «passe» pas encore (elle viendra en $11+0 \ominus$).

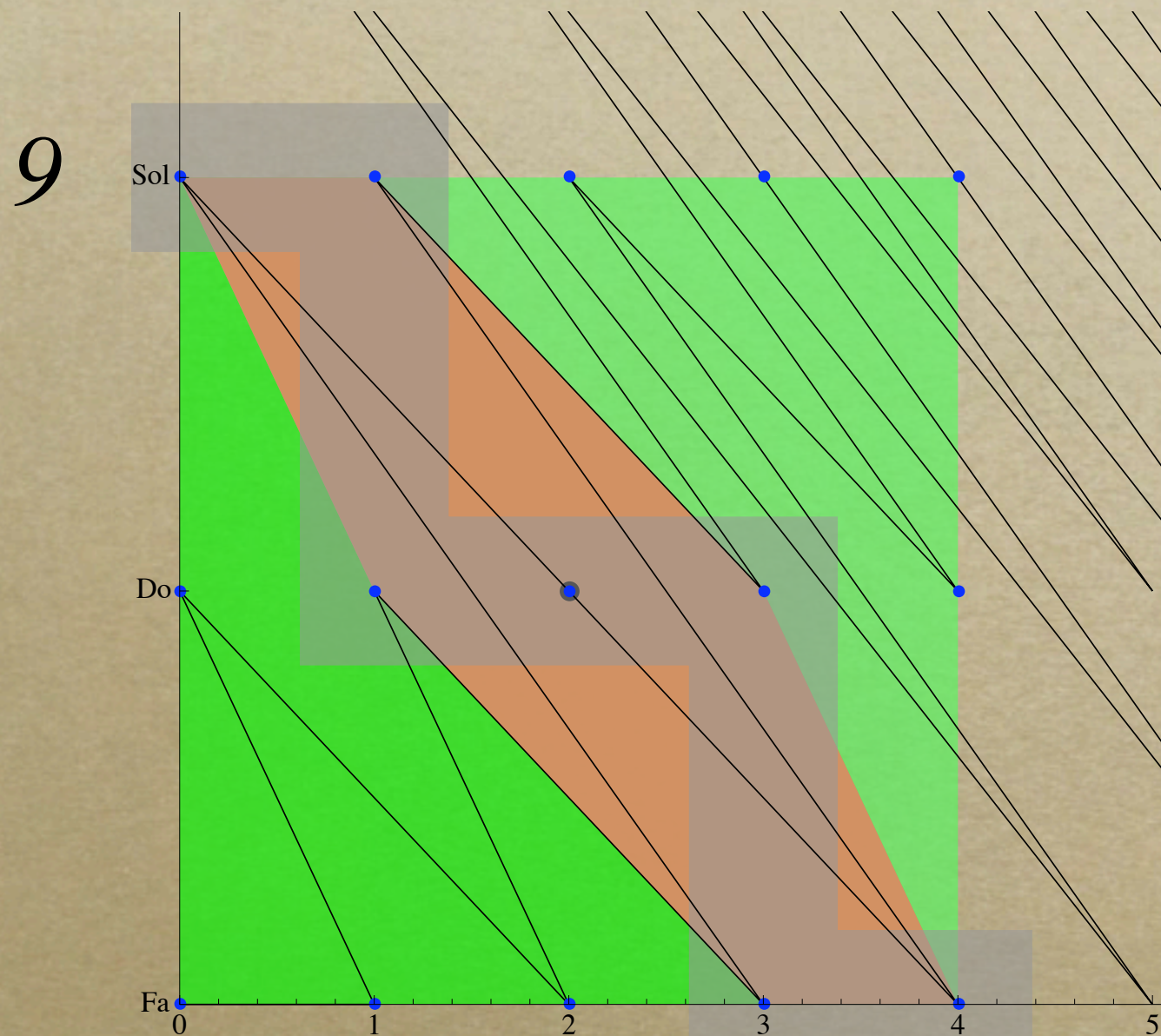
Les régions via les réduites de Θ

Les régions via les réduites de Θ



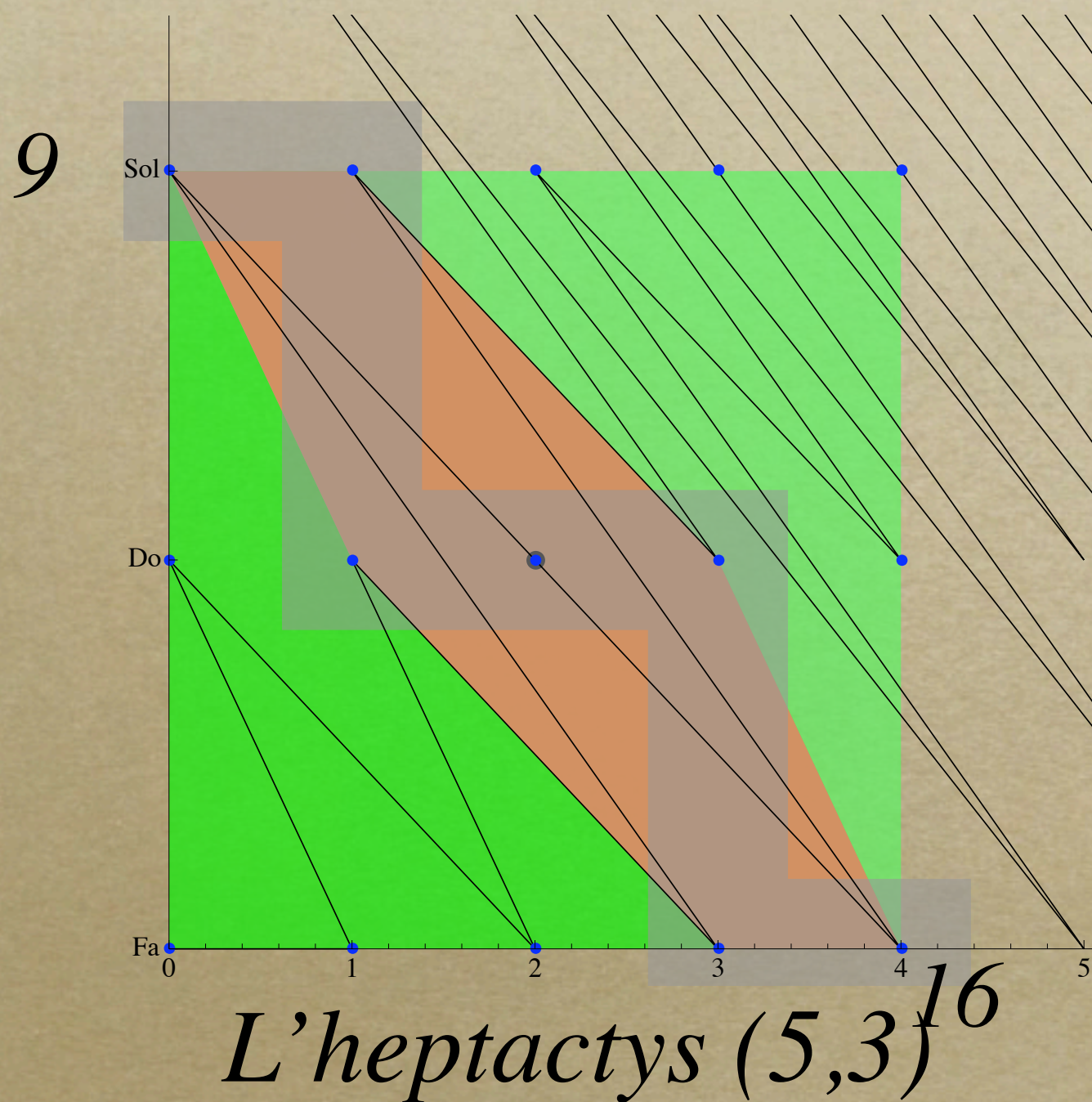
L'heptactys (5,3)

Les régions via les réduites de Θ

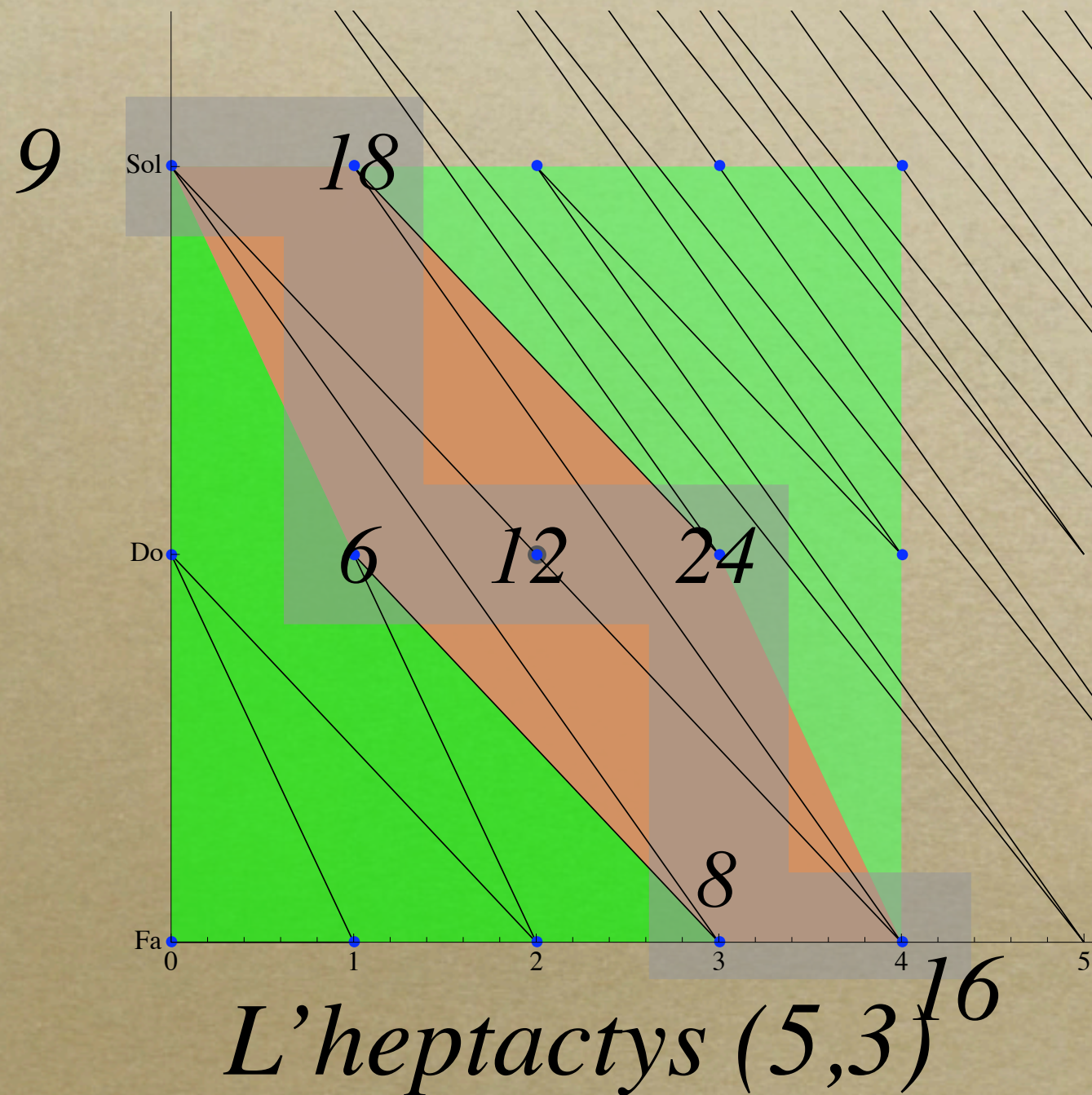


L'heptactys (5,3)

Les régions via les réduites de Θ

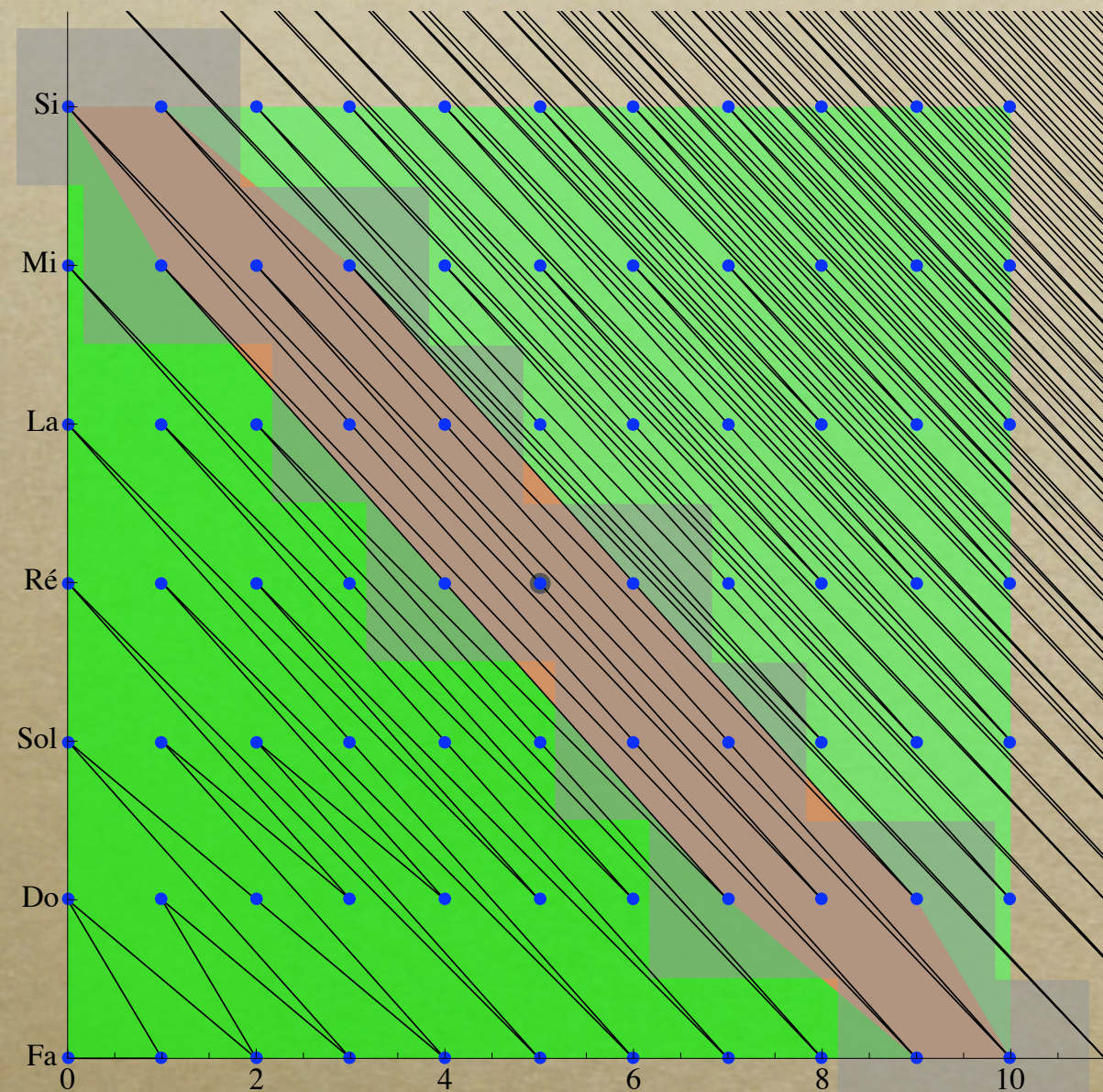


Les régions via les réduites de Θ



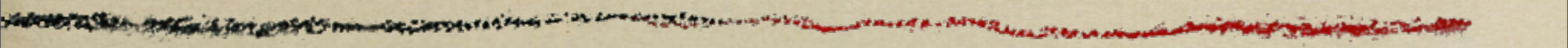
Les régions via les réduites de Θ

Les régions via les réduites de Θ



La région (11, 7) (gamme diatonique)

PALINDROMES



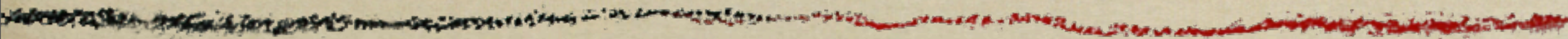
PALINDROMES

- *Les régions sont symétriques par construction, i.e. correspondent à des mots palindromiques.*

PALINDROMES

- *Les régions sont symétriques par construction, i.e. correspondent à des mots palindromiques.*
- *Quels autres palindromes ? Maximaux ? Exhaustifs ?*

Recouvrement



Recouvrement

$\Lambda =$ a b cbc d cc dcd edcde dd ede ddedd
fddeddf ddd fddfdddfddf g fddfddf gfddfg
fdfgfddfgfdf gfg fdfgfd ffgfdfgfg
ffgfgfdfgfgff gfgfg ffgfgffgfgfgffgfgff h
ffgfgffgfgff hffgfgffh ffgffhffgfgffhffgff
hffh ffgffhffgff hffhffgffhffh
fffhffhffgffhffhfff hffhffh fffhffhfff
hffhffhfffhffhffh ihffhffhfffhffhffhi...

Noyaux palindromiques

Noyaux palindromiques

- *Généralisant les «régions», Norman a défini les «nuclear sequences» par:*

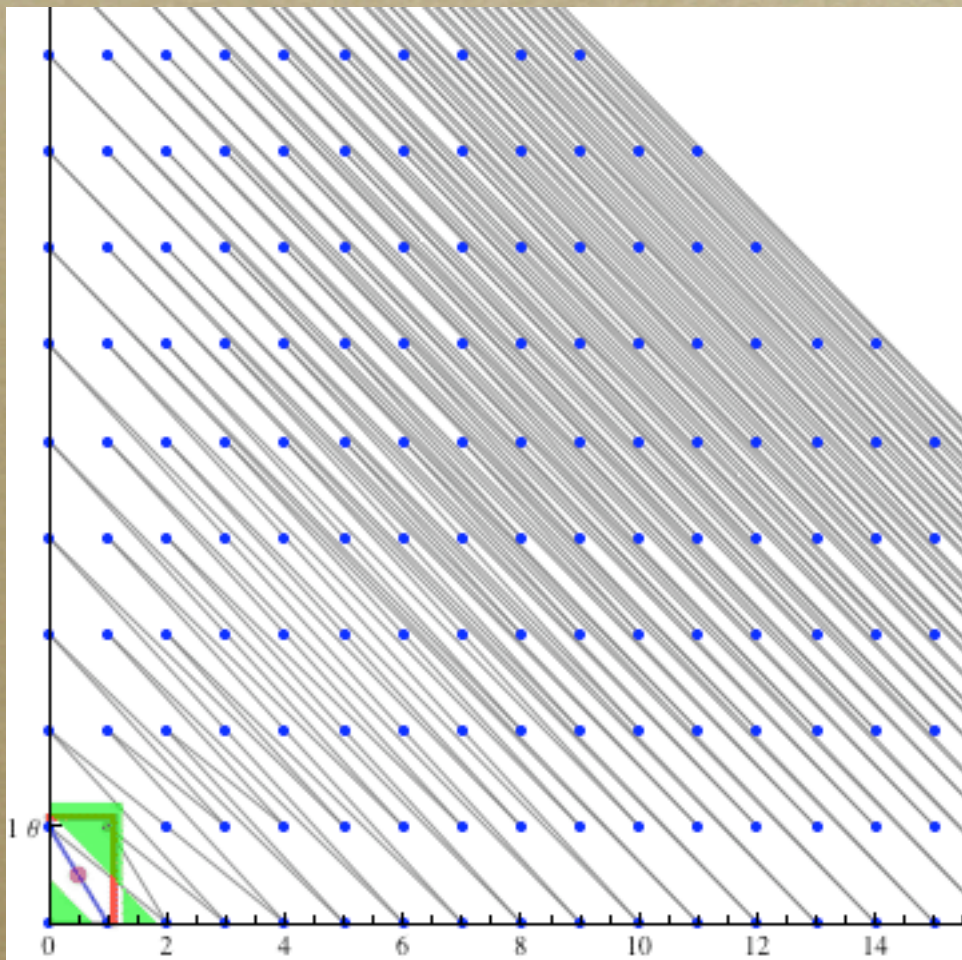
$$\{N_{A+B}\} = \begin{cases} \{a + b\theta \mid A \leq a + b\theta \leq B\theta, \lfloor B\theta \rfloor = A\} = \{N_{A+B(-)}\} \\ \text{or} \\ \{a + b\theta \mid B\theta \leq a + b\theta \leq A, \lfloor A/\theta \rfloor = B\} = \{N_{A+B(+)}\} \end{cases}$$

- *Les couples (A, B) sont tels que (mettons) pour A fixé, $A/B \approx \Theta$. Le noyau est compris entre deux triangles qui «collent» M_Θ .*

Noyaux palindromiques

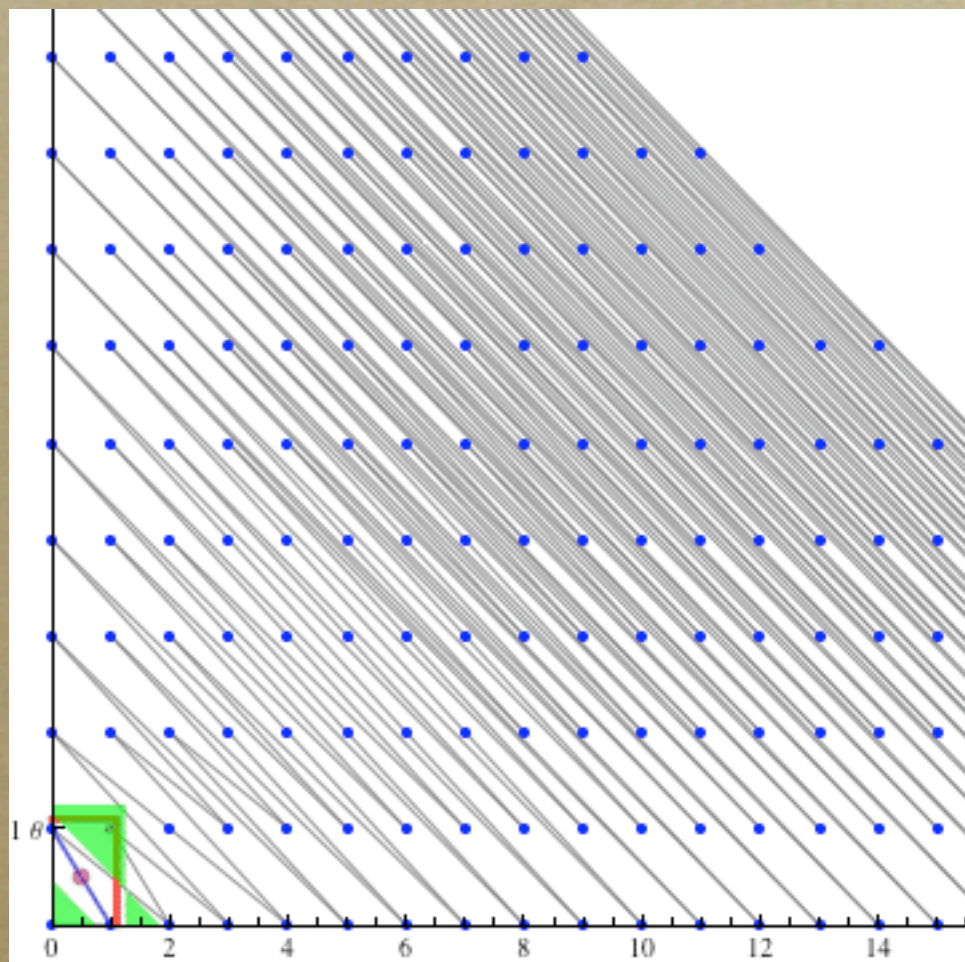
Noyaux palindromiques

(Au lieu de ne prendre que les réduites on considère les suites de Beatty encadrant Θ)



Noyaux palindromiques

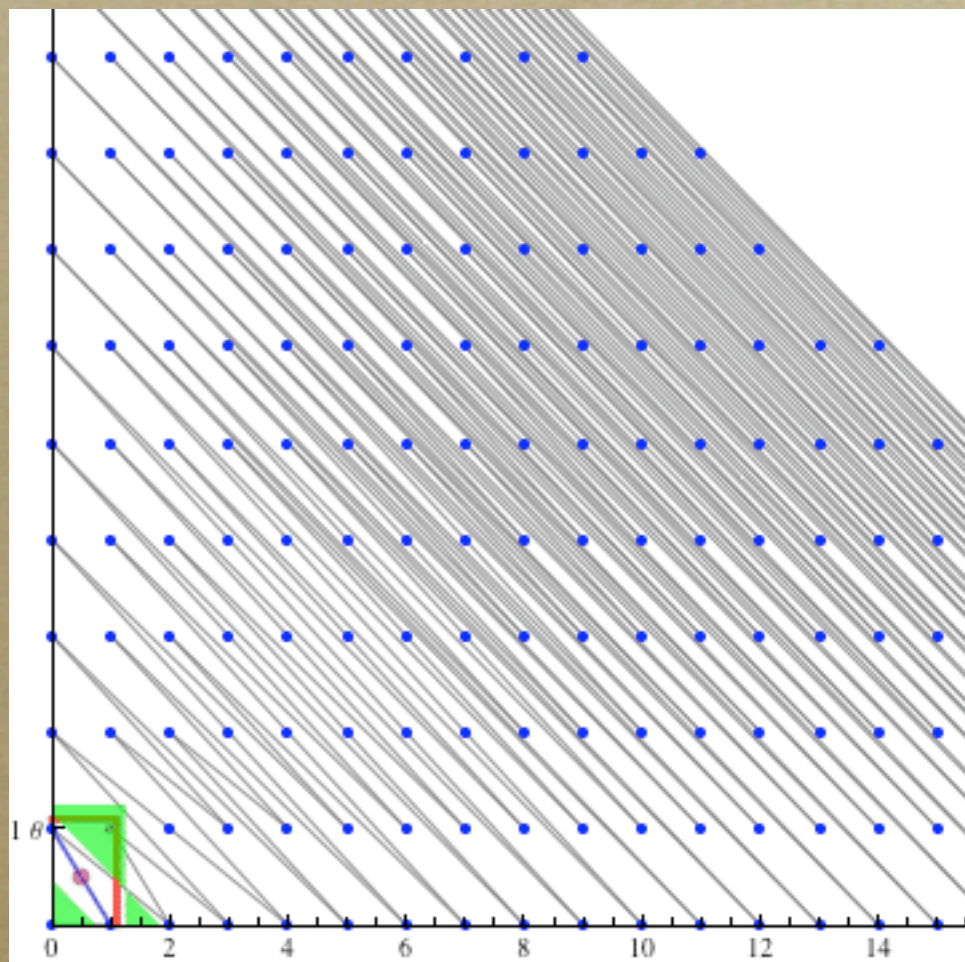
(Au lieu de ne prendre que les réduites on considère les suites de Beatty encadrant Θ)



Ainsi on a des domaines à symétrie centrale (i.e. des palindromes si on considère les différences) qui recouvrent automatiquement Λ

Noyaux palindromiques

(Au lieu de ne prendre que les réduites on considère les suites de Beatty encadrant Θ)



Ainsi on a des domaines à symétrie centrale (i.e. des palindromes si on considère les différences) qui recouvrent automatiquement Λ

a b cbc d cc dcd edcde dd ede ddedd fddeddf ddd fddfdddfddf g fddfddf gfddf g

Palindromes maximaux

Palindromes maximaux

- *On aura remarqué que ces palindromes ne sont pas (pas tous) maximaux.*

Palindromes maximaux

- *On aura remarqué que ces palindromes ne sont pas (pas tous) maximaux.*
- *On peut étendre à des palindromes maximaux par les définitions suivantes:*

Palindromes maximaux

- *On aura remarqué que ces palindromes ne sont pas (pas tous) maximaux.*
- *On peut étendre à des palindromes maximaux par les définitions suivantes:*

$$\{T_{A+B}\} = \begin{cases} \{a + b\theta \mid B\theta \leq a + b\theta < \min(A + 1, (B + 1)\theta)\} = \{T_{A+B(-)}\} \\ \text{or} \\ \{a + b\theta \mid A \leq a + b\theta < \min(A + 1, (B + 1)\theta)\} = \{T_{A+B(+)}\} \end{cases}$$

Palindromes maximaux

- *On aura remarqué que ces palindromes ne sont pas (pas tous) maximaux.*
- *On peut étendre à des palindromes maximaux par les définitions suivantes:*

$$\{T_{A+B}\} = \begin{cases} \{a + b\theta \mid B\theta \leq a + b\theta < \min(A + 1, (B + 1)\theta)\} = \{T_{A+B(-)}\} \\ \text{or} \\ \{a + b\theta \mid A \leq a + b\theta < \min(A + 1, (B + 1)\theta)\} = \{T_{A+B(+)}\} \end{cases}$$

$$\{T'_{A+B}\} = \{a + b\theta \mid (A - a) + (B - b)\theta \in \{T_{A+B}\}\}.$$

Palindromes maximaux

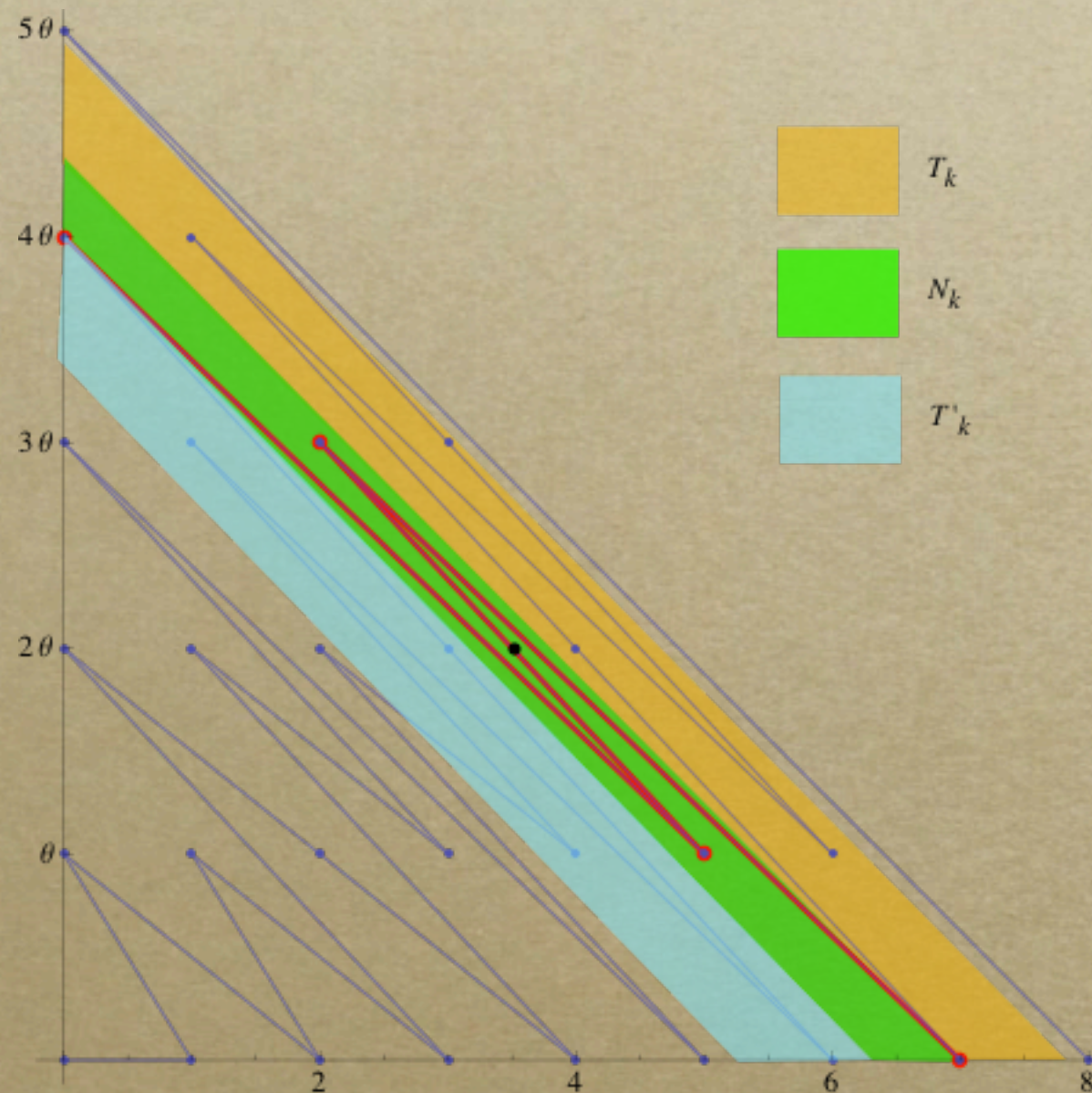
- *On aura remarqué que ces palindromes ne sont pas (pas tous) maximaux.*
- *On peut étendre à des palindromes maximaux par les définitions suivantes:*

$$\{T_{A+B}\} = \begin{cases} \{a + b\theta \mid B\theta \leq a + b\theta < \min(A + 1, (B + 1)\theta)\} = \{T_{A+B(-)}\} \\ \text{or} \\ \{a + b\theta \mid A \leq a + b\theta < \min(A + 1, (B + 1)\theta)\} = \{T_{A+B(+)}\} \end{cases}$$

$$\{T'_{A+B}\} = \{a + b\theta \mid (A - a) + (B - b)\theta \in \{T_{A+B}\}\}.$$

$$\{C_{A+B}\} = T'_{A+B} \cup \{N_{A+B}\} \cup \{T_{A+B}\}.$$

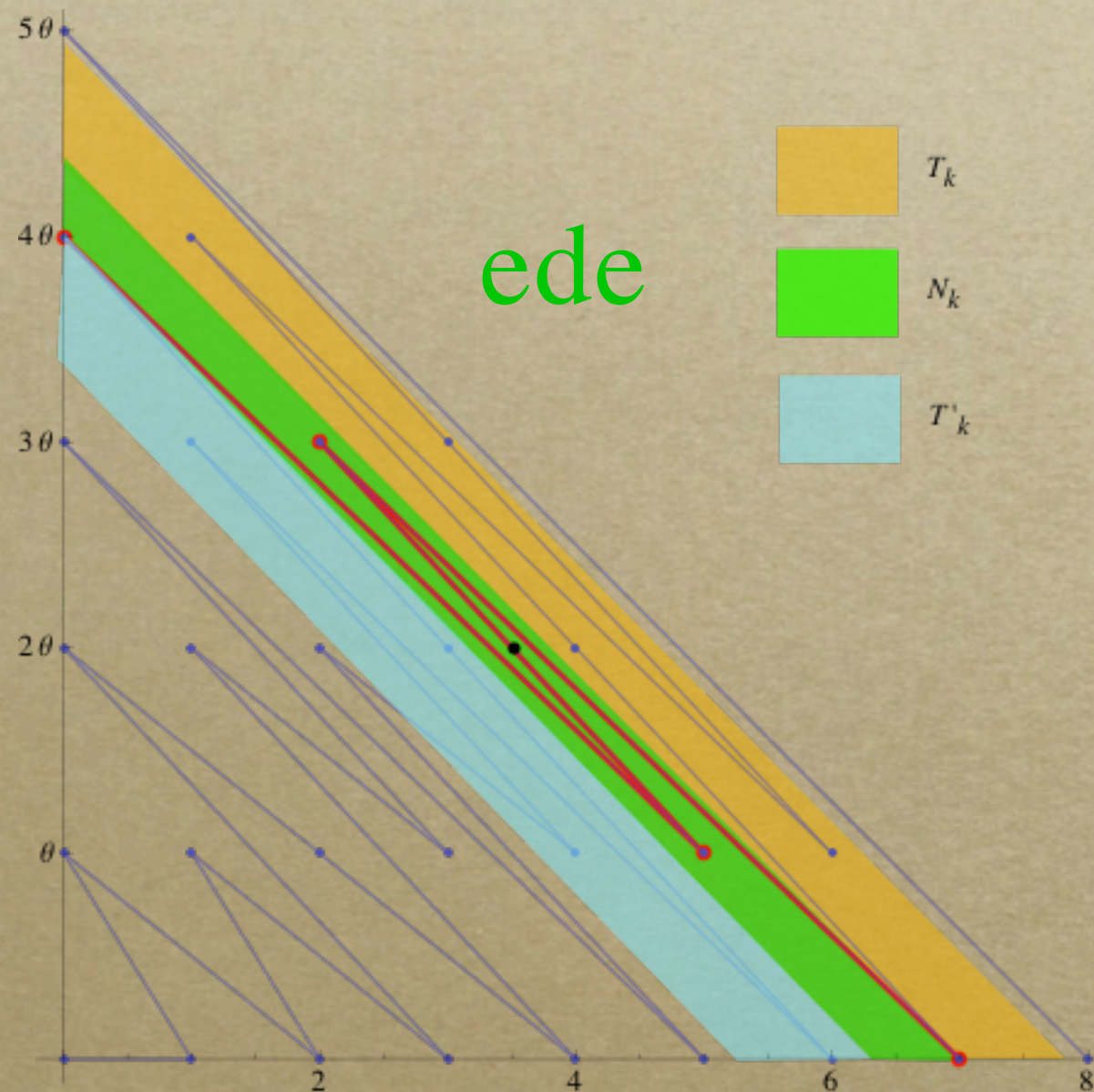
Palindromes maximaux



$$k=7+4=11$$

*À ce stade, on a tiré
au maximum ce que
l'on peut créer
comme palindromes
de manière locale,
en partant d'un
point ou d'une zone
donnée du monoïde.*

Palindromes maximaux



$$k=7+4=11$$

*À ce stade, on a tiré
au maximum ce que
l'on peut créer
comme palindromes
de manière locale,
en partant d'un
point ou d'une zone
donnée du monoïde.*

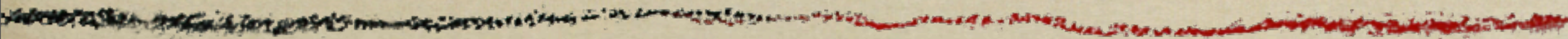
Palindromes maximaux



*À ce stade, on a tiré
au maximum ce que
l'on peut créer
comme palindromes
de manière locale,
en partant d'un
point ou d'une zone
donnée du monoïde.*

$$k=7+4=11$$

D'une lettre à elle-même



D'une lettre à elle-même

De : Norman Carey
Objet : **Lambda - and one huge discovery**
Date : 30 juin 2009 20:38:11 GMT+02:00

D'une lettre à elle-même

De : Norman Carey
Objet : **Lambda - and one huge discovery**
Date : 30 juin 2009 20:38:11 GMT+02:00

ALERT!!!!

I've just discovered a most amazing property, and it is stunning to me that I've looked at this sequence for so many years and never saw it. Here's a good chunk of lambda. I've replaced the 40 appearances of the letter g with a bold **X**:

abcbcdccdcddcdededdedddfdededdfdddfdddfdddfdddf**X**fdddfdddf**X**fdddf**X**fdf**X**fdddf**X**fdf**X**f
Xfdf**X**fdf**X**f**X**fdf**X**f**X**ff**X**f**X**fdf**X**f**X**ff**X**f**X**f**X**ff**X**f**X**ff**X**f**X**ffhff**X**f**X**ff**X**f**X**ffhff**X**f**X**ff
hff**X**ffhff**X**f**X**ffhff**X**ffhffhff**X**ffhff**X**ffhffhff**X**ffhffhffhffhffhff**X**

NOTE THIS: between any two adjacent X's, the intervening letters form a palindrome.

I am stunned.

D'une lettre à elle-même

De : Norman Carey
Objet : **Lambda - and one huge discovery**
Date : 30 juin 2009 20:38:11 GMT+02:00

ALERT!!!!

I've just discovered a most amazing property, and it is stunning to me that I've looked at this sequence for so many years and never saw it. Here's a good chunk of lambda. I've replaced the 40 appearances of the letter g with a bold **X**:

abcbcdccdcddcdededdedddeddfddeddf
Xfdf**X**fdf**X**f**X**fdf**X**f**X**ff**X**f**X**fdf**X**f**X**ff**X**f**X**
hff**X**ffhff**X**f**X**ffhff**X**ffhffhff**X**ffhff**X**

NOTE THIS: between any two adjacent
palindrome.

I am stunned.

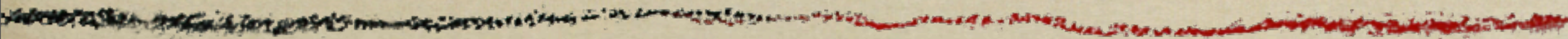
De : Norman Carey
Objet : **Champagne**
Date : 21 août 2010 23:39:15 GMT+02:00
À : Emmanuel Amiot , David Clampitt
▶ 1 pièce jointe, 172 Ko Enregistrer Coup d'œil



[SuccessiveLe....pdf \(172 Ko\)](#)

There, I think, it is.

D'une lettre à elle-même



D'une lettre à elle-même

- *Il s'agissait de montrer que si xWx est un facteur de Λ et W ne contient pas la lettre x , alors W est un palindrome.*

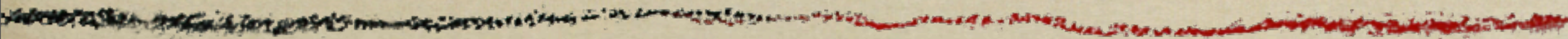
D'une lettre à elle-même

- *Il s'agissait de montrer que si xWx est un facteur de Λ et W ne contient pas la lettre x , alors W est un palindrome.*
- *À cause du syndrome des trois lettres, W peut avoir 0, 1 ou 2 lettres.*

D'une lettre à elle-même

- *Il s'agissait de montrer que si xWx est un facteur de Λ et W ne contient pas la lettre x , alors W est un palindrome.*
- *À cause du syndrome des trois lettres, W peut avoir 0, 1 ou 2 lettres.*
- *Seul le cas de deux lettres pose problème.*

D'une lettre à elle-même



D'une lettre à elle-même

- *On travaille avec la partie V du monoïde dont les différences forment le mot xWx .*

D'une lettre à elle-même

- *On travaille avec la partie V du monoïde dont les différences forment le mot xWx .*
- *D'abord on prouve que V est «mince»:
 $\max V - \min V \leq 1$ («épaisseur» de la tranche entre les deux occurrences de la différence x)*

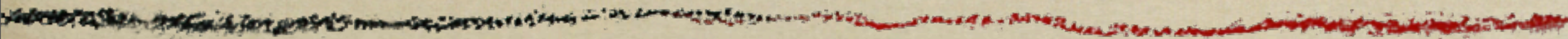
D'une lettre à elle-même

- *On travaille avec la partie V du monoïde dont les différences forment le mot xWx .*
- *D'abord on prouve que V est «mince»:
 $\max V - \min V \leq 1$ («épaisseur» de la tranche entre les deux occurrences de la différence x)*
- *On en déduit que V est entièrement contenu dans un palindrome maximal.*

D'une lettre à elle-même

- *On travaille avec la partie V du monoïde dont les différences forment le mot xWx .*
- *D'abord on prouve que V est «mince» :
 $\max V - \min V \leq 1$ («épaisseur» de la tranche entre les deux occurrences de la différence x)*
- *On en déduit que V est entièrement contenu dans un palindrome maximal.*
- *Enfin par modifications récursives de V , on prouve que c est forcément un palindrome.*

D'une lettre à elle-même



D'une lettre à elle-même

- *Principe de la preuve du dernier maillon:*

D'une lettre à elle-même

- *Principe de la preuve du dernier maillon:*
 - *On montre que V est soit centrée dans C_k (donc palindromique), soit «calée à droite», soit «calée à gauche» mais dans C_{k-1} .*

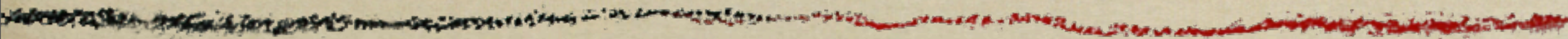
D'une lettre à elle-même

- *Principe de la preuve du dernier maillon:*
 - *On montre que V est soit centrée dans C_k (donc palindromique), soit «calée à droite», soit «calée à gauche» mais dans C_{k-1} .*
 - *Si elle est calée à droite on la remplace par son symétrique dans C_k , si gauche on décrémente k .*

D'une lettre à elle-même

- *Principe de la preuve du dernier maillon:*
 - *On montre que V est soit centrée dans C_k (donc palindromique), soit «calée à droite», soit «calée à gauche» mais dans C_{k-1} .*
 - *Si elle est calée à droite on la remplace par son symétrique dans C_k , si gauche on décrémente k .*
 - *Applicant récursivement cette transformation (au couple (V, C_k)) on finit par trouver que V centrée dans un C_m , i.e. palindromique.*

... et même plus



... et même plus

- *Norman a récemment publié un résultat qui implique le précédent :*

... et même plus

- *Norman a récemment publié un résultat qui implique le précédent :*

(Journal of Integer Sequences, Vol. 16 (2013))

... et même plus

- *Norman a récemment publié un résultat qui implique le précédent :*

(Journal of Integer Sequences, Vol. 16 (2013))

- *La complexité palindromique de Λ est maximale, i.e. Λ est «riche».*

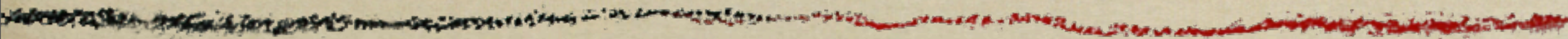
... et même plus

- *Norman a récemment publié un résultat qui implique le précédent :*

(Journal of Integer Sequences, Vol. 16 (2013))

- *La complexité palindromique de Λ est maximale, i.e. Λ est «riche».*
- *Ex: «tailor» est riche car contient 6 palindromes pour 6 lettres.*

... et même plus



... et même plus

- *Définition équivalente d'un mot «riche» : tous ses préfixes finissent par un palindrome à occurrence unique (pou).*

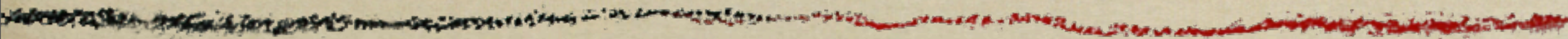
... et même plus

- *Définition équivalente d'un mot «riche» : tous ses préfixes finissent par un palindrome à occurrence unique (pou).*
- *Ex: «indeed» avec i, in, ind, inde, indee, indeed.*

... et même plus

- *Définition équivalente d'un mot «riche» : tous ses préfixes finissent par un palindrome à occurrence unique (pou).*
- *Ex: «indeed» avec i, in, ind, inde, indee, indeed.*
- *Tout facteur d'un mot riche étant riche, on peut définir les mots infinis riches.*

... et même plus



... et même plus

- *Il est assez élémentaire de prouver (entre noyaux et «facteurs centrés») que tous les préfixes des facteurs finis de Λ se terminent par un palindrome à usage unique, i.e. que Λ est riche.*

*a***bc***b*...

... et même plus

- *Il est assez élémentaire de prouver (entre noyaux et «facteurs centrés») que tous les préfixes des facteurs finis de Λ se terminent par un palindrome à usage unique, i.e. que Λ est riche.*

*abc**bc**...*

... et même plus

- *Il est assez élémentaire de prouver (entre noyaux et «facteurs centrés») que tous les préfixes des facteurs finis de Λ se terminent par un palindrome à usage unique, i.e. que Λ est riche.*

abcbcd...

... et même plus

- *Il est assez élémentaire de prouver (entre noyaux et «facteurs centrés») que tous les préfixes des facteurs finis de Λ se terminent par un palindrome à usage unique, i.e. que Λ est riche.*

abcbcdc...

... et même plus

- *Il est assez élémentaire de prouver (entre noyaux et «facteurs centrés») que tous les préfixes des facteurs finis de Λ se terminent par un palindrome à usage unique, i.e. que Λ est riche.*

abcbcdcc...

... et même plus

- *Il est assez élémentaire de prouver (entre noyaux et «facteurs centrés») que tous les préfixes des facteurs finis de Λ se terminent par un palindrome à usage unique, i.e. que Λ est riche.*

abcbcdccd...

... et même plus

- *Il est assez élémentaire de prouver (entre noyaux et «facteurs centrés») que tous les préfixes des facteurs finis de Λ se terminent par un palindrome à usage unique, i.e. que Λ est riche.*

abcbcdccdc...

... et même plus

- *Il est assez élémentaire de prouver (entre noyaux et «facteurs centrés») que tous les préfixes des facteurs finis de Λ se terminent par un palindrome à usage unique, i.e. que Λ est riche.*

*abcbcdcc***dcd**...

... et même plus

- *Il est assez élémentaire de prouver (entre noyaux et «facteurs centrés») que tous les préfixes des facteurs finis de Λ se terminent par un palindrome à usage unique, i.e. que Λ est riche.*

abcbcdccdcde...

... et même plus

- *Il est assez élémentaire de prouver (entre noyaux et «facteurs centrés») que tous les préfixes des facteurs finis de Λ se terminent par un palindrome à usage unique, i.e. que Λ est riche.*

*abcbcdccdc***ded**...

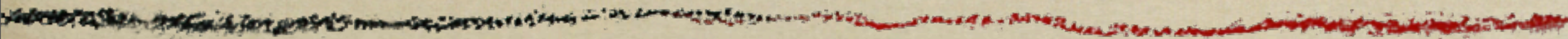
... et même plus

- *Il est assez élémentaire de prouver (entre noyaux et «facteurs centrés») que tous les préfixes des facteurs finis de Λ se terminent par un palindrome à usage unique, i.e. que Λ est riche.*

*abcbcdccdc***ded**...

- *La richesse implique la «conjecture des occurrences successives»*

Pour finir



Pour finir

- *Garder la ternarité et rien d'autre*

Pour finir

- *Garder la ternarité et rien d'autre*
- *On peut projeter Λ sur un mot de trois lettres, Γ . Comme les palindromes de Λ ont au maximum trois lettres, tout palindrome de Λ se projette sur un palindrome de Γ .*

Pour finir

- *Garder la ternarité et rien d'autre*
- *On peut projeter Λ sur un mot de trois lettres, Γ . Comme les palindromes de Λ ont au maximum trois lettres, tout palindrome de Λ se projette sur un palindrome de Γ .*
- *En revanche Γ n'est pas riche.*

abcbcd

Pour finir

- *Garder la ternarité et rien d'autre*
- *On peut projeter Λ sur un mot de trois lettres, Γ . Comme les palindromes de Λ ont au maximum trois lettres, tout palindrome de Λ se projette sur un palindrome de Γ .*
- *En revanche Γ n'est pas riche.*

abcbca

Pour finir

- *Garder la ternarité et rien d'autre*
- *On peut projeter Λ sur un mot de trois lettres, Γ . Comme les palindromes de Λ ont au maximum trois lettres, tout palindrome de Λ se projette sur un palindrome de Γ .*
- *En revanche Γ n'est pas riche.*

abcbcaccaaeacae

Pour finir

- *Garder la ternarité et rien d'autre*
- *On peut projeter Λ sur un mot de trois lettres, Γ . Comme les palindromes de Λ ont au maximum trois lettres, tout palindrome de Λ se projette sur un palindrome de Γ .*
- *En revanche Γ n'est pas riche.*

abcbcacacabacababab...

Pour finir

- *Garder la ternarité et rien d'autre*
- *On peut projeter Λ sur un mot de trois lettres, Γ . Comme les palindromes de Λ ont au maximum trois lettres, tout palindrome de Λ se projette sur un palindrome de Γ .*
- *En revanche Γ n'est pas riche.*

abcbcaccaeaacaeaeaaeaaafaaafaa

Pour finir

- *Garder la ternarité et rien d'autre*
- *On peut projeter Λ sur un mot de trois lettres, Γ . Comme les palindromes de Λ ont au maximum trois lettres, tout palindrome de Λ se projette sur un palindrome de Γ .*
- *En revanche Γ n'est pas riche.*

abcbcaccaeaacabababaabaacaabaacaa

Bibliographie

Bibliographie

- *N. Carey*, On a class of locally symmetric sequences: The right infinite word Λ_Θ , in *Mathematics and Computation in Music, Lect. Notes in Comp. Sci., Vol. 6726*, Springer, 2011, pp. 42–55
- *N. Carey and D. Clampitt*, Regions: A theory of tonal spaces in early medieval treatises, *J. Music Theory* 40 (1996), 113–147.
- *N. Carey*, Lambda Words: A Class of Rich Words Defined Over an Infinite Alphabet, *Article 13.3.4 Journal of Integer Sequences*, Vol. 16 (2013) 3.