

Classification des applications lisses de $\mathbb{R}^2$ to $\mathbb{R}^2$

Nicolas Delanoue - Sébastien Lagrange

Université d'Angers

RAIM 2013 - Rencontres Arithmétiques de l'Informatique Mathématique

Institut Henri Poincaré, Paris - 20 novembre 2013

<http://raim2013.lip6.fr>

Outline

- 1 Introduction
 - Objets, Equivalence, Invariants
 - Discrétisation - Portrait d'une application
- 2 Applications génériques et leurs singularités en dimension 2
 - Théorème de Whitney
 - Compact simplement connexe à bord
- 3 Calcul par intervalles et applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
- 4 Calcul du contour apparent
- 5 Conjecture et conclusion

Objets

On note $\mathcal{C}^\infty$ l'ensemble des fonctions lisses de X dans Y .

Objets

On note $\mathcal{C}^\infty$ l'ensemble des fonctions lisses de X dans Y .

Equivalence

$f, f' : X \rightarrow Y$ sont équivalentes s'ils existent des difféomorphismes $g : X \rightarrow X$ et $h : Y \rightarrow Y$ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow g & & \uparrow h \\ X & \xrightarrow{f'} & Y \end{array}$$

commute.

Objets

On note $\mathcal{C}^\infty$ l'ensemble des fonctions lisses de X dans Y .

Equivalence

$f, f' : X \rightarrow Y$ sont équivalentes s'ils existent des difféomorphismes $g : X \rightarrow X$ et $h : Y \rightarrow Y$ tels que le diagramme

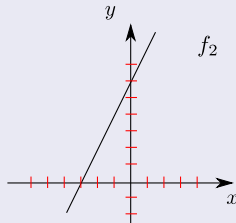
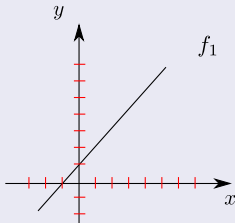
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow g & & \uparrow h \\ X & \xrightarrow{f'} & Y \end{array}$$

commute.

On note $\sim$ cette relation d'équivalence.

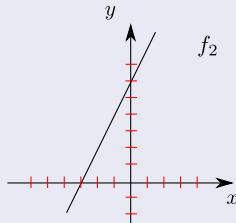
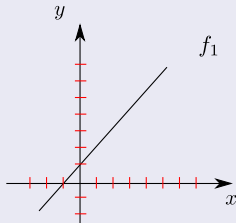
Exemple : $f_1 \sim f_2$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f_1(x)=2x+6} & \mathbb{R} \\ \downarrow g & & \uparrow h \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{f_2(x)=x+1} & \mathbb{R} \end{array}$$



Exemple : $f_1 \sim f_2$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f_1(x)=2x+6} & \mathbb{R} \\ \downarrow x+2 & & \uparrow 2y \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{f_2(x)=x+1} & \mathbb{R} \end{array}$$



Exemple

$$f_1(x) = x^2, f_2(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

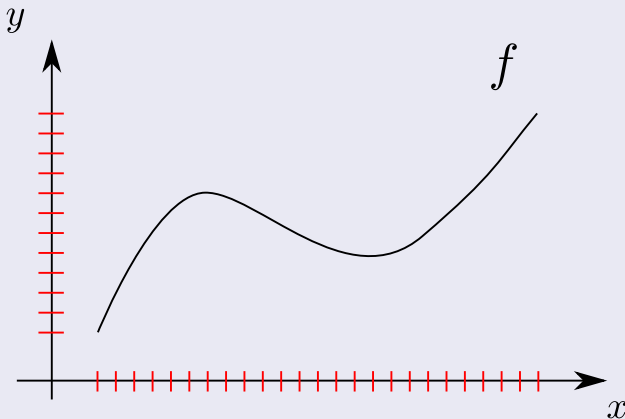
$$f_1 \sim f_2$$

Exemple

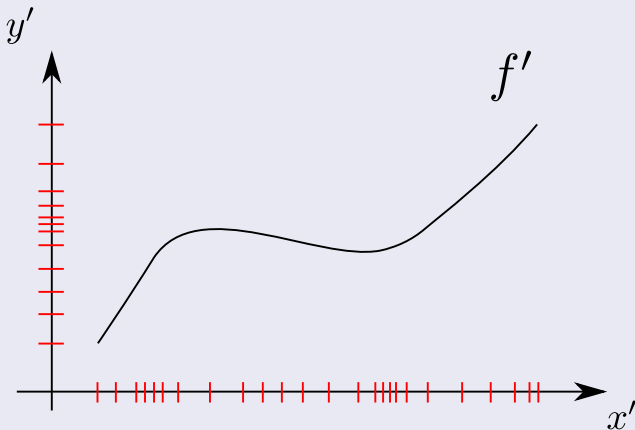
$$f_1(x) = x^2, f_2(x) = x,$$

$$f_1 \not\sim f_2$$

Remarque



Remarque



Proposition

On suppose que $f \sim f'$ avec

$$\begin{array}{ccc} x_1 & \xrightarrow{f} & y_1 \\ \downarrow g & & \uparrow h \\ x_2 & \xrightarrow{f'} & y_2 \end{array}$$

alors $\text{rank } df_{x_1} = \text{rank } df'_{x_2}$.

Preuve

Chain rule, $df = dh \cdot df' \cdot dg$

Définition

Soit S_f l'ensemble des points critiques de f :

$$S_f = \{x \in X \mid df(x) \text{ est singulière.}\}.$$

Corollaire

$$f \sim f' \Rightarrow S_f \simeq S_{f'}$$

où $\simeq$ signifie homéomorphe.

i.e. la **topologie de l'ensemble des points critiques** est un invariant.

Ce n'est pas un invariant complet,
ils existent des fonctions lisses $f, f' : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ telles que

$$S_f \simeq S_{f'} \text{ et } f \not\sim f'.$$

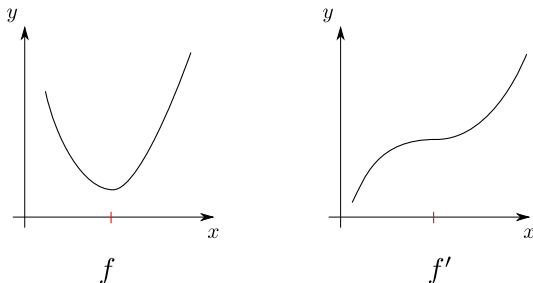


FIGURE: Singularity theory.

Ce n'est pas un invariant complet,
 ils existent des fonctions lisses $f, f' : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ telles que

$$S_f \simeq S_{f'} \text{ et } f \not\sim f'.$$

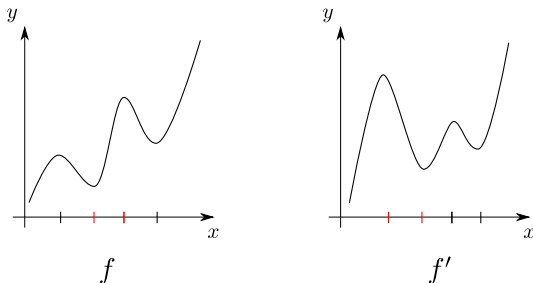
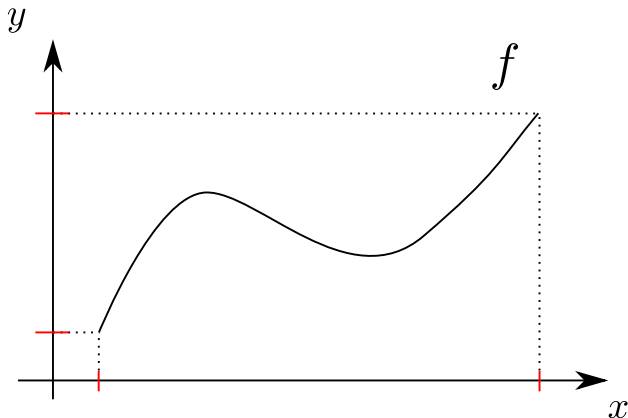
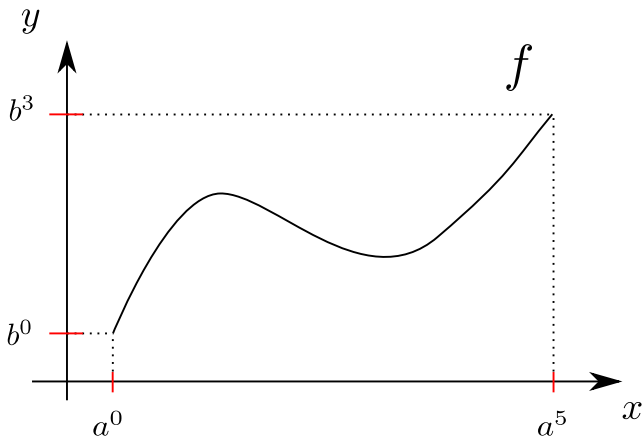
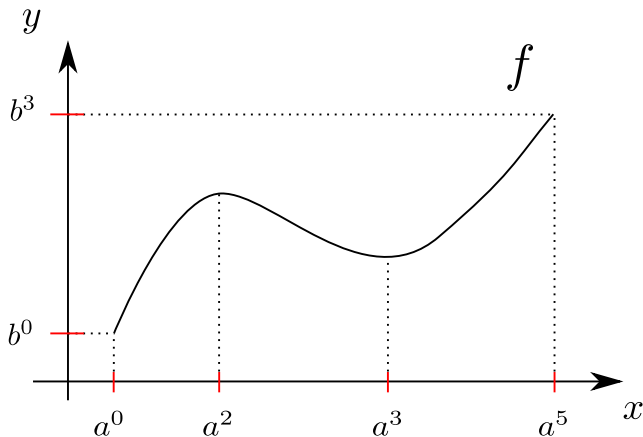
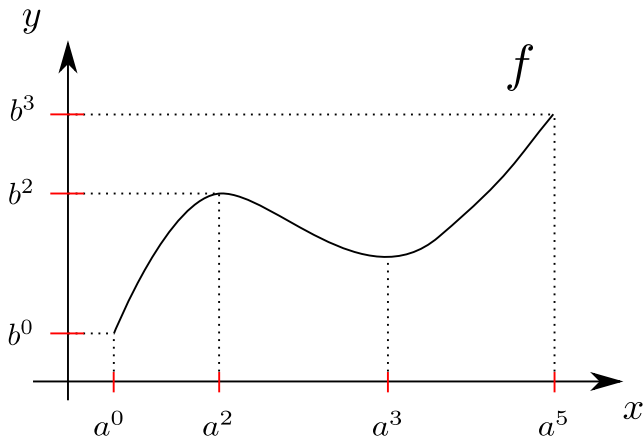


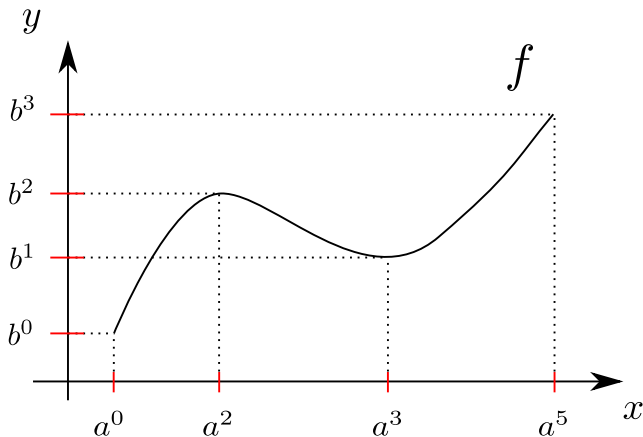
FIGURE: Topologie de X .

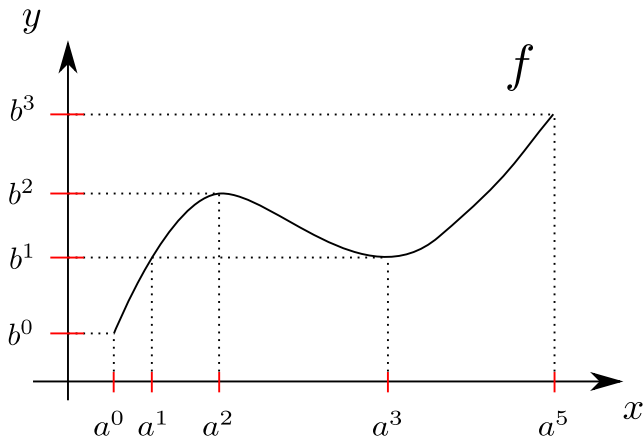


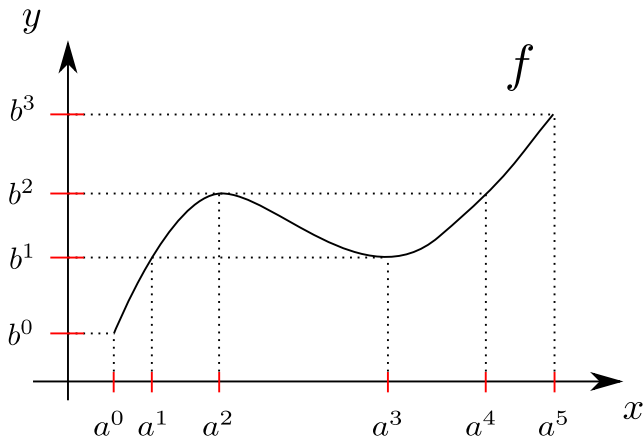


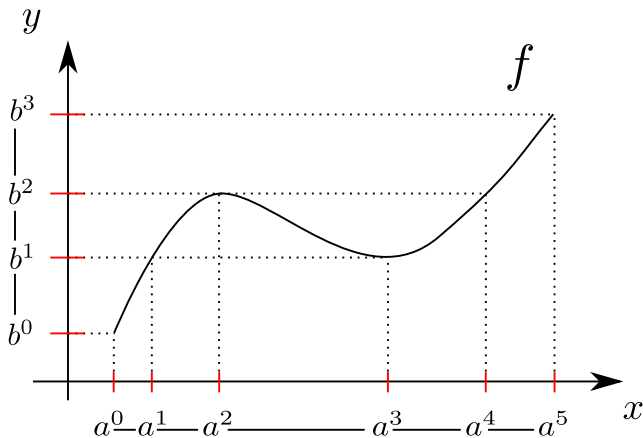


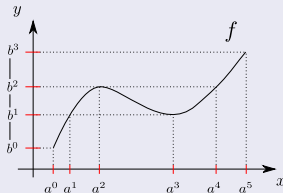


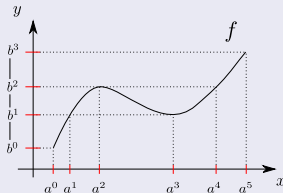












$$a^0 - a^1 - a^2 - a^3 - a^4 - a^5 \xrightarrow{F} b^0 - b^1 - b^2 - b^3$$

$$\begin{aligned}
 F : \quad a^0 &\mapsto b^0 \\
 a^1 &\mapsto b^1 \\
 a^2 &\mapsto b^2 \\
 a^3 &\mapsto b^1 \\
 a^4 &\mapsto b^2 \\
 a^5 &\mapsto b^3
 \end{aligned}$$

Définition - Complexe simplicial abstrait

Soit $\mathcal{N}$ un ensemble fini de symboles $\{(a^0), (a^1), \dots, (a^n)\}$

Un complexe simplicial abstrait $\mathcal{K}$ est un sous ensemble des parties $\mathcal{N}$ vérifiant : $\sigma \in \mathcal{K} \Rightarrow \forall \sigma_0 \subset \sigma, \sigma_0 \in \mathcal{K}$

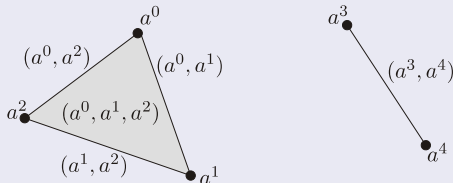
Définition - Complexe simplicial abstrait

Soit $\mathcal{N}$ un ensemble fini de symboles $\{(a^0), (a^1), \dots, (a^n)\}$

Un complexe simplicial abstrait $\mathcal{K}$ est un sous ensemble des parties $\mathcal{N}$ vérifiant : $\sigma \in \mathcal{K} \Rightarrow \forall \sigma_0 \subset \sigma, \sigma_0 \in \mathcal{K}$

Exemple

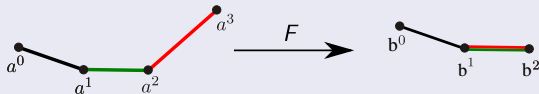
$$\mathcal{K} = a^0 a^1 a^2 + a^3 a^4$$



Définition

Soient $\mathcal{K}$ et $\mathcal{L}$ deux complexes simpliciaux, une *application simpliciale* $F : \mathcal{K}^0 \rightarrow \mathcal{L}^0$ est une application satisfaisant :
 $(a^0, a^1, \dots, a^n) \in \mathcal{K} \Rightarrow (F(a^0), F(a^1), \dots, F(a^n)) \in \mathcal{L}$.

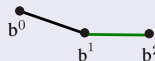
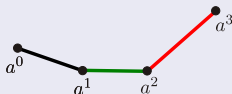
Exemple - Application simpliciale



$$\begin{array}{rcl}
 F & : & a^0 \mapsto b^0 \\
 & & a^1 \mapsto b^1 \\
 & & a^2 \mapsto b^2 \\
 & & a^3 \mapsto b^1
 \end{array}$$

Exemple - Application non simpliciale

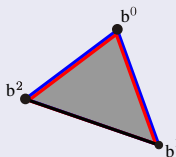
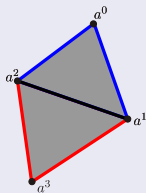
$$\mathcal{K} = a_0 a_1 + a_1 a_2 + a_2 a_3, \quad \mathcal{L} = b_0 b_1 + b_1 b_2$$



$$F : \begin{array}{ll} a^0 & \mapsto b^0 \\ a^1 & \mapsto b^1 \\ a^2 & \mapsto b^2 \\ a^3 & \mapsto b^0 \end{array}$$

Exemple - Application simpliciale

$$\mathcal{K} = a_0 a_1 a_2 + a_1 a_2 a_3, \quad \mathcal{L} = b_0 b_1 b_2$$



$$F : \begin{array}{ll} a^0 & \mapsto b^0 \\ a^1 & \mapsto b^1 \\ a^2 & \mapsto b^2 \\ a^3 & \mapsto b^0 \end{array}$$

Définition

Soient f et f' des applications continues. Alors f et f' sont *conjuguées topologiquement* s'ils existent des homéomorphismes $g : X \rightarrow X'$ et $h : Y \rightarrow Y'$ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow g & & \uparrow h \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array}$$

commute.

Proposition

$$f \sim f' \Rightarrow f \sim_0 f'$$

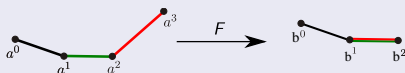
Définition

Soit f une fonction lisse et F une application simpliciale, F est un *portrait* de f si

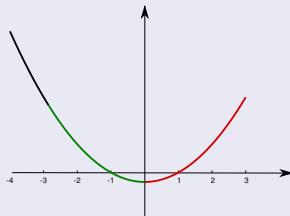
$$f \sim_0 F$$

Exemple - Application simpliciale

L'application simpliciale



est un portrait de $[-4, 3] \ni x \mapsto x^2 - 1 \in \mathbb{R}$



Proposition

Pour chaque partie fermée A de $\mathbb{R}^n$, il existe une fonction réelle lisse f telle que

$$A = f^{-1}(\{0\})$$

Proposition

Pour chaque partie fermée A de $\mathbb{R}^n$, il existe une fonction réelle lisse f telle que

$$A = f^{-1}(\{0\})$$

On ne va pas considérer tous les cas ...

Théorème de Whitney [1955]

Soient X et Y deux variétés de dimension 2 et f *générique*.
 L'ensemble des points critiques S_f est une courbe régulière. Soit $p \in S_f$, on a

$$T_p S_f \oplus \ker df_p = T_p X \text{ ou } T_p S_f = \ker df_p$$

Représentations géométriques

❶ $T_p S_f \oplus \ker df_p = T_p X$,

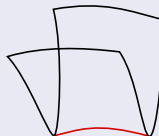
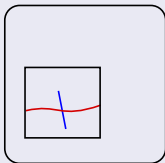


❷ $T_p S_f = \ker df_p$,

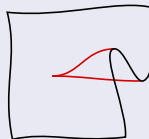
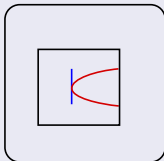


Représentations géométriques

- ① $T_p S_f \oplus \ker df_p = T_p X$: point pli

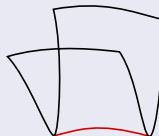
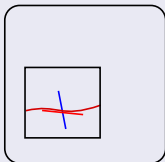


- ② $T_p S_p = \ker df_p$: point cusp

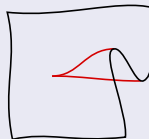
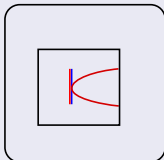


Représentations géométriques

- ① $T_p S_f \oplus \ker df_p = T_p X$: point pli



- ② $T_p S_p = \ker df_p$: point cusp

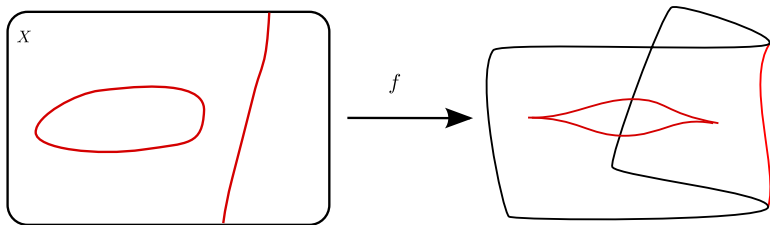


Définition

Soit f une fonction lisse de $X \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec X un compact simplement connexe de $\mathbb{R}^2$ à bord lisse ∂X . Le *contour apparent* de f est

$$f(S_f \cup \partial X)$$

La **topologie du contour apparent** est un invariant.

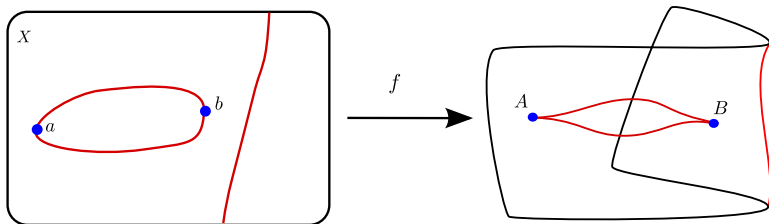


Définition

Soit f une fonction lisse de $X \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec X un compact simplement connexe de $\mathbb{R}^2$ à bord lisse ∂X . Le *contour apparent* de f est

$$f(S_f \cup \partial X)$$

La **topologie du contour apparent** est un invariant.

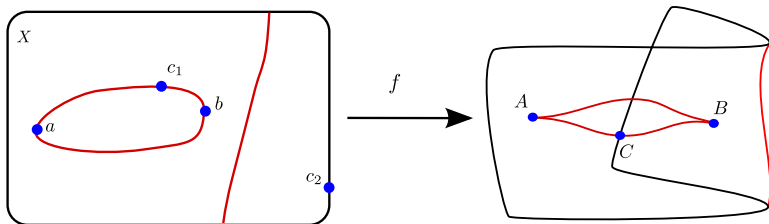


Définition

Soit f une fonction lisse de $X \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec X un compact simplement connexe de $\mathbb{R}^2$ à bord lisse ∂X . Le *contour apparent* de f est

$$f(S_f \cup \partial X)$$

La **topologie du contour apparent** est un invariant.

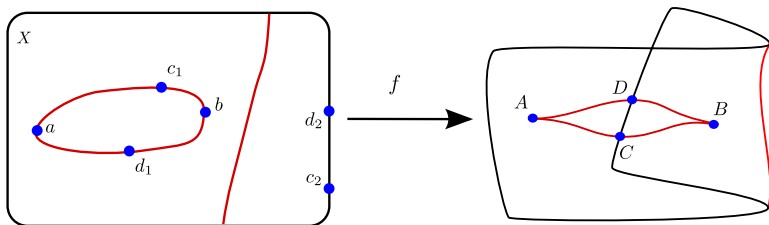


Définition

Soit f une fonction lisse de $X \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec X un compact simplement connexe de $\mathbb{R}^2$ à bord lisse ∂X . Le *contour apparent* de f est

$$f(S_f \cup \partial X)$$

La **topologie du contour apparent** est un invariant.

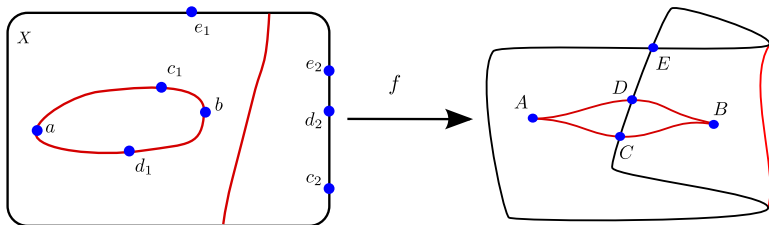


Définition

Soit f une fonction lisse de $X \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec X un compact simplement connexe de $\mathbb{R}^2$ à bord lisse ∂X . Le *contour apparent* de f est

$$f(S_f \cup \partial X)$$

La **topologie du contour apparent** est un invariant.

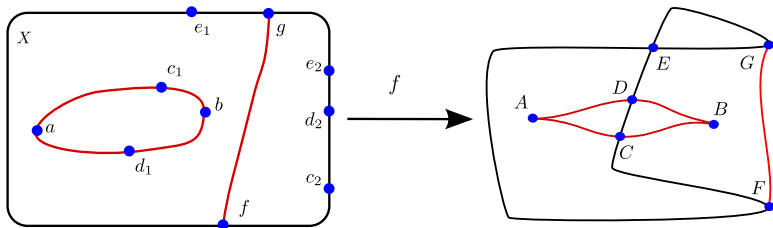


Définition

Soit f une fonction lisse de $X \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec X un compact simplement connexe de $\mathbb{R}^2$ à bord lisse ∂X . Le *contour apparent* de f est

$$f(S_f \cup \partial X)$$

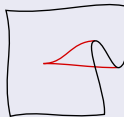
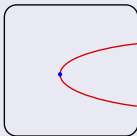
La **topologie du contour apparent** est un invariant.



Théorème - Propriétés globales des applications génériques

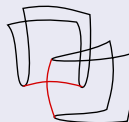
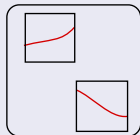
Soient X compact simplement connexe de $\mathbb{R}^2$. Une application générique $f : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ vérifie les propriétés suivantes :

- 1 S est une courbe régulière. De plus, les éléments de S sont des plis ou des cusps. L'ensemble des cusps est discret.



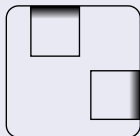
Théorème

- ③ 3 points singuliers n'ont pas la même image,
- ④ 2 points singuliers, ayant la même image, sont des plis et les images des jacobiennes sont différentes.



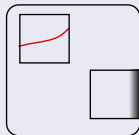
Théorème

- ⑤ 3 points du bords n'ont pas la même image,
- ⑥ 2 points du bords ayant la même image se croisent dans l'image.



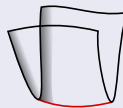
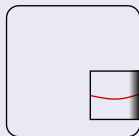
Théorème

- ⑦ 3 points appartenant $S_f \cup \partial X$ n'ont pas la même image,
- ⑧ si un point singulier et un point du bord ont la même image, le point singulier est un pli et ils se croisent dans l'image.



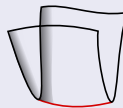
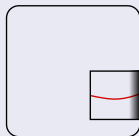
Théorème

- 9 si la courbe singulière intersecte le bord, alors ce point est un pli,
- 10 de plus, les espaces tangents sont différents.



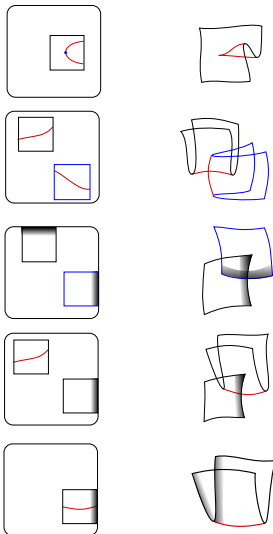
Théorème

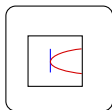
- 9 si la courbe singulière intersecte le bord, alors ce point est un pli,
- 10 de plus, les espaces tangents sont différents.



Preuve

Théorème de transversalité de René Thom et sa généralisation aux multijets par John Mather dans les années 1970.



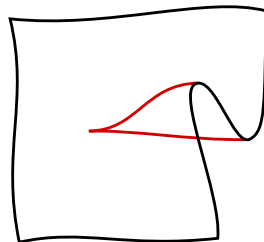
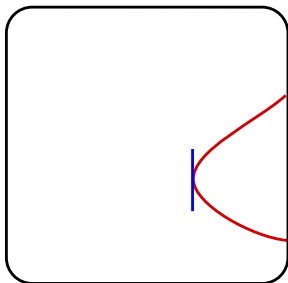


Proposition

Soit f une fonction générique de X dans $\mathbb{R}^2$, on définit l'application c par :

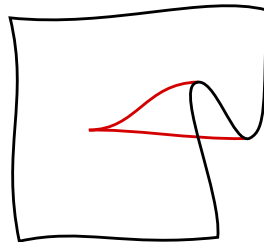
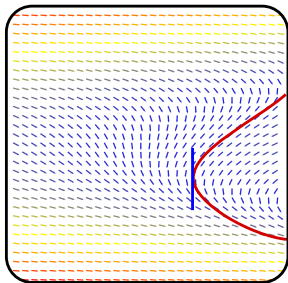
$$\begin{aligned} c &: X \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ p &\mapsto df_p \xi_p \end{aligned} \quad (1)$$

où ξ est un champ de vecteurs défini par $\xi_p = \begin{pmatrix} \partial_2 \det df_p \\ -\partial_1 \det df_p \end{pmatrix}$.
 $c(p) = 0$ et dc_p est inversible si et seulement si p est un cusp.



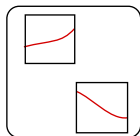
Méthode de Newton par intervalles

$$\begin{aligned} c &: X \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ p &\mapsto df_p \xi_p \end{aligned} \quad (2)$$



Méthode de Newton par intervalles

$$\begin{aligned} c &: X \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ p &\mapsto df_p \xi_p \end{aligned} \quad (3)$$

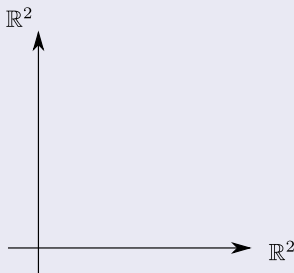


Méthode de Newton par intervalles

$$\begin{aligned}
 \text{folds} : \quad X \times X &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\
 \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) &\mapsto \begin{pmatrix} \det df(x_1, y_1) \\ \det df(x_2, y_2) \\ f_1(x_1, y_1) - f_1(x_2, y_2) \\ f_2(x_1, y_1) - f_2(x_2, y_2) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

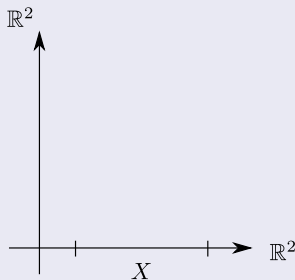
Méthode

Schéma de bisection sur $X \times X$.



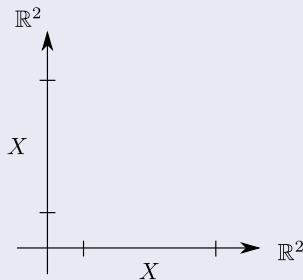
Méthode

Schéma de bisection sur $X \times X$.



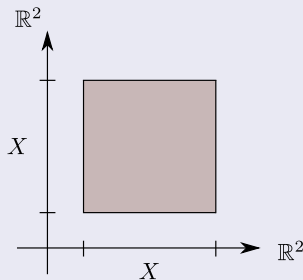
Méthode

Schéma de bisection sur $X \times X$.



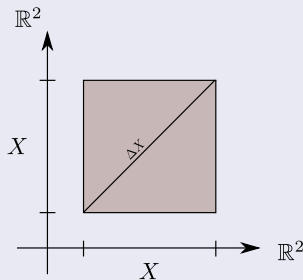
Méthode

Schéma de bisection sur $X \times X$.



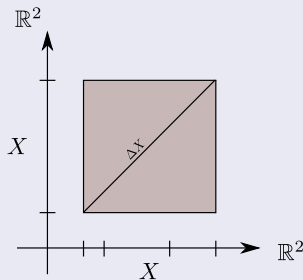
Méthode

Schéma de bisection sur $X \times X$.



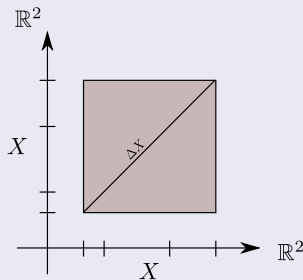
Méthode

Schéma de bisection sur $X \times X$.



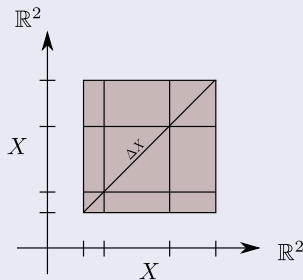
Méthode

Schéma de bisection sur $X \times X$.



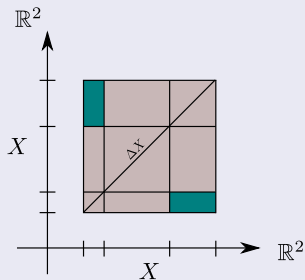
Méthode

Schéma de bisection sur $X \times X$.



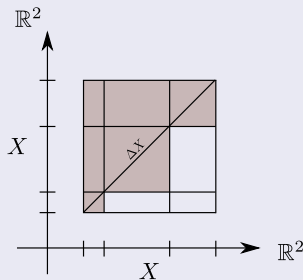
Méthode

Schéma de bisection sur $X \times X$.



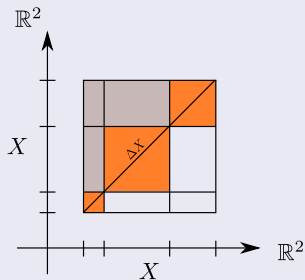
Méthode

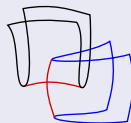
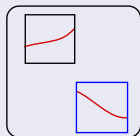
Schéma de bisection sur $X \times X$.



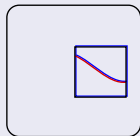
Méthode

Schéma de bisection sur $X \times X$.





$$[x_1] \neq [x_2]$$



$$[x_1] = [x_2]$$

Pour tout (α, α) dans ΔS , $d \text{ folds}$ est conjuguée à

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ a_{11} & a_{12} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

qui n'est pas inversible car $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \det df(\alpha) = 0$.

C'est à dire, tout ensemble de la forme $[x_1] \times [x_1]$ contient ΔS , et donc la méthode de Newton par intervalles va échouer.

Pour tout (α, α) dans ΔS , $d \text{ folds}$ est conjuguée à

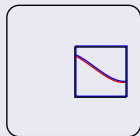
$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ a_{11} & a_{12} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

qui n'est pas inversible car $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \det df(\alpha) = 0$.

C'est à dire, tout ensemble de la forme $[x_1] \times [x_1]$ contient ΔS , et donc la méthode de Newton par intervalles va échouer.

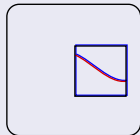
On a besoin d'une méthode qui prouve $f|_{S \cap [x_1]}$ est injective.

On a besoin d'une méthode qui prouve $f|_{S \cap [x_1]}$ est injective.



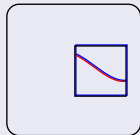
$$[x_1] = [x_2]$$

On a besoin d'une méthode qui prouve $f|_{S \cap [x_1]}$ est injective.



$$[x_1] = [x_2]$$

Pas dans ce cas ...



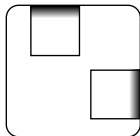
Corollary

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application lisse et X un compact de $\mathbb{R}^2$. Soit $\Gamma : X \rightarrow \mathbb{R}$ une submersion telle que la courbe $S = \{x \in X \mid \Gamma(x) = 0\}$ est contractile.

Si

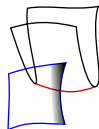
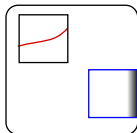
$$\forall J \in \tilde{df}(X) \cdot \begin{pmatrix} \partial_2 \Gamma(X) \\ -\partial_1 \Gamma(X) \end{pmatrix}, \text{rank } J = 1$$

alors $f|_S$ est une injection.



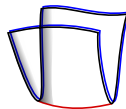
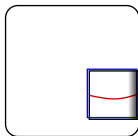
Méthode de Newton par intervalles

$$\begin{aligned}
 \text{boundaries} : \quad X \times X &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\
 \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) &\mapsto \begin{pmatrix} \Gamma(x_1, y_1) \\ \Gamma(x_2, y_2) \\ f_1(x_1, y_1) - f_1(x_2, y_2) \\ f_2(x_1, y_1) - f_2(x_2, y_2) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$



Méthode de Newton par intervalles, $[x_1] \neq [x_2]$

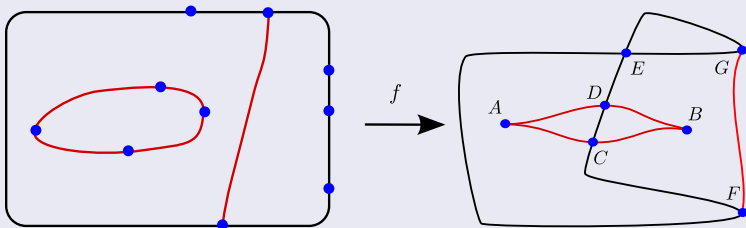
$$\begin{aligned}
 X \times X &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\
 \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) &\mapsto \begin{pmatrix} \det df(x_1, y_1) \\ \Gamma(x_2, y_2) \\ f_1(x_1, y_1) - f_1(x_2, y_2) \\ f_2(x_1, y_1) - f_2(x_2, y_2) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$



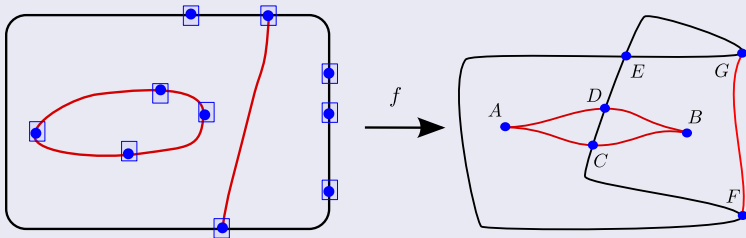
Méthode de Newton par intervalles, $[x_1] = [x_2]$

$$\begin{array}{ccc} X & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \left(\begin{array}{c} x_1 \\ y_1 \end{array} \right) & \mapsto & \left(\begin{array}{c} \det df(x_1, y_1) \\ \Gamma(x_1, y_1) \end{array} \right) \end{array}$$

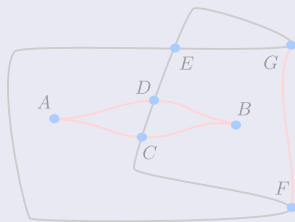
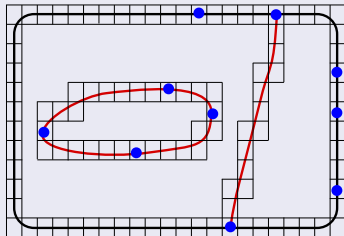
Analyse



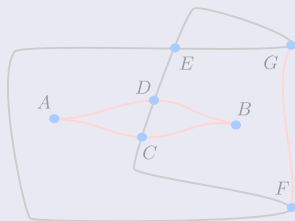
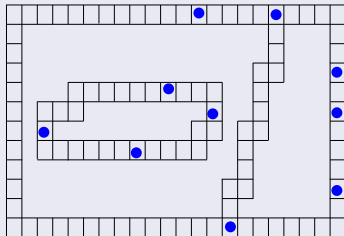
Analyse



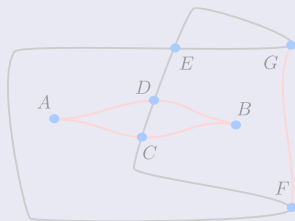
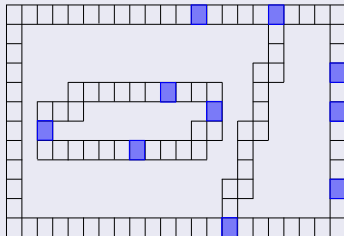
Analyse



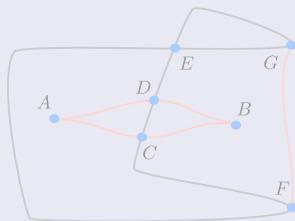
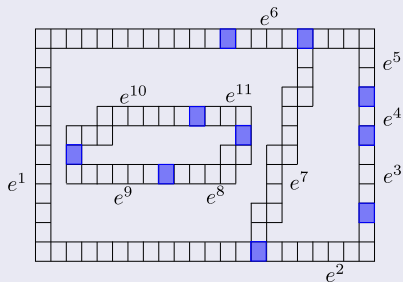
Analyse



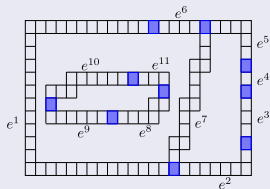
Analyse



Analyse

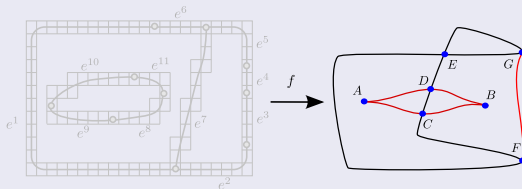


Synthèse



$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} & e^1 & e^2 & e^3 & e^4 & e^5 & e^6 & e^7 & e^8 & e^9 & e^{10} & e^{11} \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ d_2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Synthèse



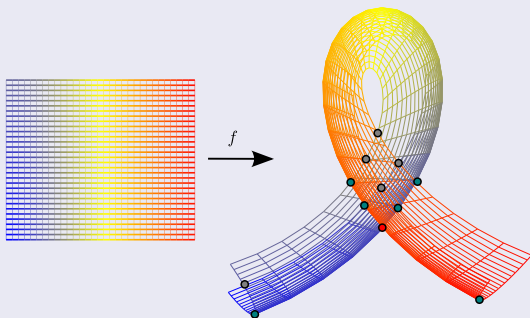
$$\mathcal{X}/f = \begin{matrix} & e^1 & e^2 & e^3 & e^4 & e^5 & e^6 & e^7 & e^8 & e^9 & e^{10} & e^{11} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Théorème

Pour chaque portrait F de f , le 1-squelette de ImF contient un sous graphe qui est une expansion de $\mathcal{X}/f$.

Exemple numérique - Solver Thom

$$f : [-1, 4] \times [-0.4, 0.6] \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0.5x + (1 - y^2) \cos(x + 0.2y) \\ (1 - y^2) \sin(x) \end{pmatrix}$$



- ❶ the number of cusp points is exactly 0,
- ❷ the number of transversal intersection of fold curves in the target is exactly 1,
- ❸ the number of transversal intersection of boundary curves in the target is exactly 5,
- ❹ the number of intersection fold curves with boundary is exactly 6.

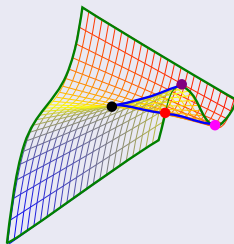
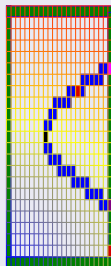
The topology of the Apparent Contour is the following :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple numérique

$$f : [-0.2, 0.33] \times [-0.7, 0.61] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

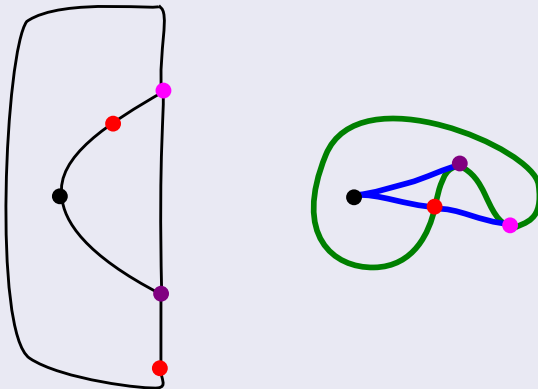
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 0.2y \\ y^3 - xy \end{pmatrix}$$



Temps de calcul : 2 secondes

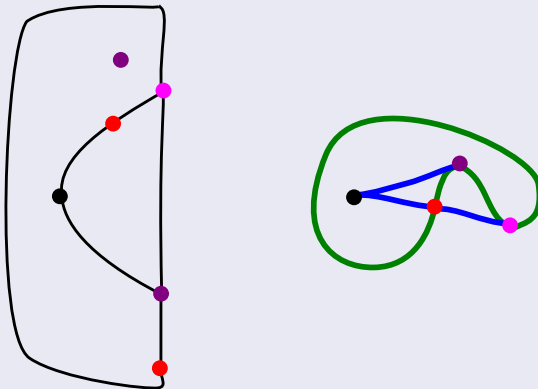
Conjecture

Avec $\mathcal{X}/f$ et son plongement dans $\mathbb{R}^2$, il est possible de construire un portrait pour f .



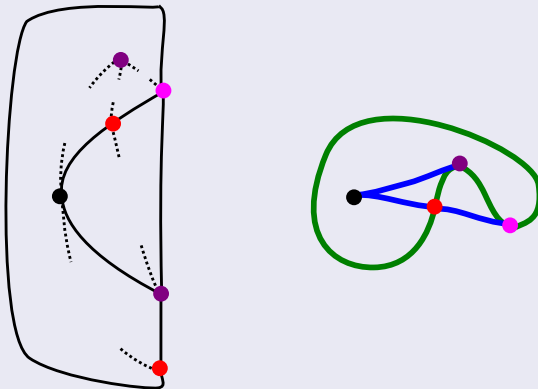
Conjecture

Avec $\mathcal{X}/f$ et son plongement dans $\mathbb{R}^2$, il est possible de construire un portrait pour f .



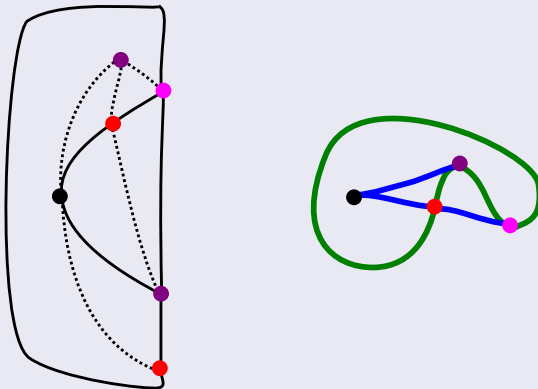
Conjecture

Avec $\mathcal{X}/f$ et son plongement dans $\mathbb{R}^2$, il est possible de construire un portrait pour f .



Conjecture

Avec $\mathcal{X}/f$ et son plongement dans $\mathbb{R}^2$, il est possible de construire un portrait pour f .





Merci pour votre attention.